Fiche de révision : Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 15.1*, *Théorème 15.1*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 15 [3], et un renvoi comme *Théorème 14.18 du cours 14*, à un énoncé numéroté d'un autre cours : sur les fonctions trigonométriques [1] ou sur les vecteurs et la géométrie dans le plan et l'espace [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page mohamedkadhem.com/baccalaureat.

1 Produit scalaire

Les vecteurs sont ceux du plan, ou ceux de l'espace ; $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

- **Définition 15.1 et Remarque 15.1 (produit scalaire) :** le *produit scalaire* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le réel
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right).$$
Il ne fait intervenir que des longueurs : il ne dépend d'aucun repère.
- **Théorème 15.1 (repères orthonormés, admis) :** (i) si A est un point d'un plan $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire de $\mathcal{P}$, il existe $\overrightarrow{j}$ tel que $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ soit un repère orthonormé de $\mathcal{P}$; (ii) l'espace a des repères orthonormés.
- **Théorème 15.2 et Remarque 15.2 (coordonnées) :** dans une base *orthonormée*, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx'+yy'$ si $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ (plan), et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx'+yy'+zz'$ si $\overrightarrow{u}(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v}(x',y',z')$ (espace). Cette formule ne vaut pas dans une base quelconque ; pour démontrer une propriété, on peut calculer dans un repère orthonormé quelconque.
- **Théorème 15.3 (règles de calcul) :** (i) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$; (ii) $(t\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = t(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}')\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}'\cdot\overrightarrow{v}$, et de même à droite ; (iii) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$; (iv)
$$\|\overrightarrow{u}\pm\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \pm 2\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2,$$
et $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$.

- **Théorème 15.4 (critère d'orthogonalité) :** $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur (Définition 14.12 (i) du cours 14 [2]).

2 Angle et projection

- **Définition 15.2 (angle de deux vecteurs) :** si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont *non nuls*, leur angle est l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, mesuré en radians dans $[0, \pi]$; il ne dépend pas de A (admis).
- **Théorème 15.5 (produit scalaire et cosinus) :** si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et d'angle θ, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$.
- **Exemple 15.2 (calculer un angle) :** dans une base orthonormée de l'espace, $\overrightarrow{u}(1,1,0)$ et $\overrightarrow{v}(1,0,1)$ donnent $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. Comme $\theta \in [0,\pi]$ et que cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ (Théorème 11.8 (i) du cours 11 [1]), $\theta = \frac{\pi}{3}$: une seule valeur, et non une famille de valeurs définie à 2π près.
- **Remarque 15.3 (signe) :** pour $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ non nuls d'angle θ, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} > 0$ si et seulement si $\theta < \frac{\pi}{2}$, et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} < 0$ si et seulement si $\theta > \frac{\pi}{2}$.
- **Définition 15.3 et Théorème 15.6 (projeté orthogonal sur une droite) :** le projeté orthogonal de C sur une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est le point H de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{u}$. Si $A \neq B$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$: (i) le projeté H de C sur (AB) existe, est unique, et $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{u}$, où $t = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) / \|\overrightarrow{u}\|^2$; (ii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AH}$, qui vaut $AB \times AH$ si $\overrightarrow{AH}$ est nul ou de même sens que $\overrightarrow{u}$, et $-AB \times AH$ sinon.
- **Théorème 15.7 (Al-Kashi, médiane) :** dans un triangle ABC, (i) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$; (ii) si I est le milieu de $[BC]$, $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

3 Vecteurs normaux et équations

- **Définition 15.4 et Théorème 15.8 (droite du plan) :** un *vecteur normal* à une droite $\mathcal{D}$ du plan est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Dans un repère *orthonormé* du plan, si $\overrightarrow{n}(\alpha,\beta) \neq \overrightarrow{0}$: (i) la droite passant par $A(x_A, y_A)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, d'équation $\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0$, de vecteur directeur $(-\beta, \alpha)$; (ii) $\overrightarrow{n}(\alpha,\beta)$ est normal à la droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
- **Définition 15.5 (vecteur normal à un plan) :** un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ est un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$; il est alors orthogonal à $\overrightarrow{AM}$ pour tous points A, M de $\mathcal{P}$.

- **Théorème 15.9 (vecteur normal à un plan) :** soit $\mathcal{P}$ passant par A, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. (i) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ est une base de l'espace. (ii) $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. (iii) $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. (iv) Deux vecteurs normaux à $\mathcal{P}$ sont colinéaires.
- **Théorème 15.10 et Remarque 15.4 (équation cartésienne d'un plan) :** dans un repère *orthonormé* de l'espace, (i) le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour équation $\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) + \gamma(z - z_A) = 0$; (ii) si α, β, γ ne sont pas tous nuls, l'ensemble des points tels que $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$ est un plan, de vecteur normal $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$. On dit *une* équation cartésienne : en la multipliant par un réel non nul, on en obtient une autre.
- **Exemple 15.5 (de la représentation paramétrique à l'équation) :** dans un repère orthonormé, pour le plan passant par $A(1, 1, 0)$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v}(0, 1, 2)$, on résout $\alpha + \gamma = 0$ et $\beta + 2\gamma = 0$: $\overrightarrow{n}(1, 2, -1)$, puis l'équation $x + 2y - z - 3 = 0$.

4 Produit vectoriel

- **Définitions 15.6 et 15.7 (repère direct, produit vectoriel) :** les bases orthonormées de l'espace sont *directes* ou *indirectes* (règle de la main droite : pouce selon $\overrightarrow{i}$, index selon $\overrightarrow{j}$, majeur selon $\overrightarrow{k}$) ; un repère orthonormé est direct si sa base l'est. Dans une base orthonormée *directe*, le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ est

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\,(yz' - zy',\ zx' - xz',\ xy' - yx')\,;$$

  il ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie (admis).
- **Théorème 15.11 (propriétés) :** (i) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$; (ii) $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, $(t\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = t(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}') \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}' \wedge \overrightarrow{v}$; (iii) $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2$; (iv) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ; (v) pour $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ non nuls d'angle θ, $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \sin\theta$.
- **Corollaire 15.1 (vecteur normal, aire) :** (i) tout plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$; (ii) si A, B, C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC), et l'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.
- **Exemple 15.6 (méthode) :** dans un repère orthonormé direct, pour $A(1, 2, 0)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 1, 3)$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-5, -4, -3)$ n'est pas nul, donc A, B, C ne sont pas alignés ; avec $\overrightarrow{n}(5, 4, 3)$, (ABC) a pour équation $5x + 4y + 3z - 13 = 0$ (on vérifie sur B et C), et l'aire de ABC est $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

5 Positions relatives

- **Définition 15.8 (parallélisme) :** soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. (i) Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ est *parallèle* à $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire si $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. (ii) Un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}'$, $\overrightarrow{v}'$ est parallèle à $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$ sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire si $\overrightarrow{u}' \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{v}' \cdot \overrightarrow{n} = 0$. (iii) Deux plans, ou une droite et un plan, sont *strictement parallèles* s'ils sont parallèles et sans point commun.
- **Théorème 15.12 (droite et plan) :** soient $\mathcal{D}$ passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$, et $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. (i) Si $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$: contenue dans $\mathcal{P}$ si $A \in \mathcal{P}$, strictement parallèle sinon. (ii) Si $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$, ils ont un point commun et un seul.
- **Théorème 15.13 (deux plans) :** soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n}'$. (i) Ils sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont colinéaires ; ils sont alors confondus s'ils ont un point commun, strictement parallèles sinon. (ii) Sinon, ils sont *sécants* : ils se coupent selon une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$.
- **Théorème 15.14 (théorème du toit) :** si deux droites parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont contenues respectivement dans deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.
- **Théorème 15.15 et Remarque 15.5 (deux droites de l'espace) :** soient $\mathcal{D}$ passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$, et $\mathcal{D}'$ passant par A' de vecteur directeur $\overrightarrow{w}'$. (i) Si $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w}'$ sont colinéaires, les droites sont parallèles : confondues si elles ont un point commun, sans point commun sinon. (ii) Sinon, elles ont au plus un point commun ; elles en ont un si et seulement si $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w}'$ sont coplanaires, et sinon elles sont *non coplanaires*. En pratique, on compare les vecteurs directeurs, puis on résout le système de trois équations d'inconnues t, t' donné par les représentations paramétriques.

6 Distances et sphère

- **Définition 15.9 (projeté sur un plan, distance) :** soient $\mathcal{P}$ un plan, $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et M_0 un point. La droite passant par M_0 de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ coupe $\mathcal{P}$ en un seul point H, le *projeté orthogonal* de M_0 sur $\mathcal{P}$, et $d(M_0, \mathcal{P}) = M_0H$.
- **Théorème 15.16 (distance d'un point à un plan) :** si H est le projeté orthogonal de M_0 sur un plan $\mathcal{P}$, (i) $M_0M^2 = M_0H^2 + HM^2$ pour tout $M \in \mathcal{P}$: H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M_0 ; (ii) dans un repère *orthonormé*, si $\mathcal{P} : \alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + d|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

- **Corollaire 15.2 (distance d'un point à une droite du plan) :** dans un repère orthonormé du plan, si $\mathcal{D} : \alpha x+\beta y+\gamma = 0$, le projeté orthogonal H de $M_0(x_0, y_0)$ sur $\mathcal{D}$ est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de M_0, et

$$d(M_0, \mathcal{D}) = M_0H = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

- **Définition 15.10 et Théorème 15.17 (sphère) :** pour $R > 0$, la sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$. Dans un repère orthonormé, avec $\Omega(a, b, c)$: (i) elle a pour équation $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$; (ii) l'ensemble des points tels que $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+e = 0$ est, avec $k = a^2+b^2+c^2-e$, la sphère de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$ si $k > 0$, le point Ω si $k = 0$, l'ensemble vide si $k < 0$.
- **Théorème 15.18 (sphère et plan) :** soient $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon R, $\mathcal{P}$ un plan, H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$ et $h = d(\Omega, \mathcal{P})$. (i) Si $h > R$, aucun point commun. (ii) Si $h = R$, un seul point commun, H : $\mathcal{P}$ est *tangent* à $\mathcal{S}$ en H. (iii) Si $h < R$, l'intersection est le cercle de $\mathcal{P}$ de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-h^2}$.
- **Exemple 15.9 (une sphère et deux plans) :** dans un repère orthonormé, $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5 = 0$ donne $(a, b, c) = (1, -2, 3)$ et $k = 9$: sphère de centre $\Omega(1, -2, 3)$ et de rayon 3. Le plan $2x-y+2z-1 = 0$, à la distance 3 de Ω, lui est tangent en $H(-1, -1, 1)$; le plan $2x-y+2z-4 = 0$, à la distance 2, la coupe selon un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 15. Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.