Fiche de révision : Dénombrement, Combinatoire

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 17.1*, *Théorème 17.1*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 17 [2], sur le dénombrement, et un renvoi comme *Théorème 7.2 du cours 7*, à un énoncé numéroté du cours sur les probabilités [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Les lettres n, p, k désignent des entiers naturels, et E un ensemble fini.

1 Cardinal d'un ensemble fini

- **Définition 17.1 (ensemble fini, cardinal) :** pour $n \geq 1$, un ensemble E a n éléments si l'on peut écrire $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, les x_i étant deux à deux distincts ; E est alors *fini*, de *cardinal* $\mathrm{Card}\,(E) = n$. L'ensemble vide est fini, de cardinal 0.
- **Propriété 17.1 (principe additif, admise) :** soient A et B deux ensembles finis. (i) Le cardinal ne dépend pas de la numérotation choisie. (ii) Toute partie de A est finie. (iii) Si $A \cap B = \emptyset$, alors $A \cup B$ est fini et $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B)$.
- **Théorème 17.1 (cardinal d'une réunion) :** soient A et B deux parties d'un ensemble fini E, et $\bar{A} = E \setminus A$. (i) $\mathrm{Card}\left(\bar{A}\right) = \mathrm{Card}\,(E) - \mathrm{Card}\,(A)$, donc $\mathrm{Card}\,(A) \leq \mathrm{Card}\,(E)$. (ii) $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$. (iii) Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des ensembles finis *deux à deux disjoints*, $\mathrm{Card}\,(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \mathrm{Card}\,(A_1) + \cdots + \mathrm{Card}\,(A_k)$. (iv) Si, de plus, ils ont tous m éléments, leur réunion en a km (on compte *par paquets* de même taille).
- **Exemple 17.1 (une classe) :** sur 30 élèves, 18 jouent au football, 12 au basket et 5 aux deux : $18+12-5 = 25$ pratiquent au moins l'un des deux sports, $30 - 25 = 5$ aucun, et $18 - 5 = 13$ seulement le football.
- **Remarque 17.1 (compter par correspondance) :** s'il existe une bijection d'un ensemble fini A sur un ensemble B, alors B est fini et $\mathrm{Card}\,(B) = \mathrm{Card}\,(A)$.
- **Théorème 17.2 (produit cartésien) :** si $A_1, \ldots, A_k$ ($k \geq 2$) sont finis, $\mathrm{Card}\,(A_1 \times \cdots \times A_k) = \mathrm{Card}\,(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}\,(A_k)$.

- **Théorème 17.3 (principe multiplicatif) :** on fait un choix en $k \geq 2$ étapes successives ; il y a n_1 possibilités à la première étape et, pour chaque $i \in \{2, \ldots, k\}$, *quels que soient les choix faits aux étapes précédentes*, exactement n_i possibilités à l'étape i. Alors il y a $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ choix complets. Les possibilités d'une étape peuvent dépendre des choix précédents ; seul leur nombre doit en être indépendant.
- **Exemple 17.2 (menus, codes) :** 3 entrées, 4 plats et 2 desserts donnent $3 \times 4 \times 2 = 24$ menus (Théorème 17.2). Une lettre parmi 26 suivie de deux chiffres distincts donne $26 \times 10 \times 9 = 2340$ codes (Théorème 17.3).
- **Remarque 17.2 (additionner ou multiplier) :** on additionne quand on sépare des cas disjoints (*ou*) ; on multiplie quand on enchaîne des choix (*puis*).

2 Listes

- **Définition 17.2 et Théorème 17.4 (p-listes) :** pour $p \geq 1$, une p-liste d'éléments de E est un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p : l'ordre compte, et un élément peut figurer plusieurs fois. Si $\mathrm{Card}\,(E) = n$, il y a n^p p-listes d'éléments de E.
- **Remarque 17.3 et Exemple 17.3 (applications, codes) :** il y a n^p applications de $\{1, \ldots, p\}$ dans un ensemble à n éléments. On obtient 2^k résultats en lançant k fois une pièce, et il y a $10^4 = 10\,000$ codes de 4 chiffres.

3 Arrangements et permutations

- **Définition 17.3 (factorielle) :** $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour $n \geq 1$, et $0! = 1$ par convention ; $(n+1)! = (n+1) \times n!$ pour tout $n \geq 0$.
- **Définition 17.4 et Théorème 17.5 (arrangements) :** pour $p \geq 1$, un arrangement de p éléments de E est une p-liste d'éléments *deux à deux distincts* de E : l'ordre compte, sans répétition. Si $\mathrm{Card}\,(E) = n$ et $1 \leq p \leq n$, leur nombre est

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \ ;$$

  si $p > n$, il n'y en a aucun.
- **Exemple 17.4 (un podium) :** un podium de 3 coureurs parmi 8 est un arrangement : il y en a $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.
- **Définition 17.5 et Corollaire 17.1 (permutations) :** une permutation d'un ensemble E à $n \geq 1$ éléments est un arrangement de ses n éléments, c'est-à-dire une façon de les ranger tous dans un ordre ; il y en a $n!$. Par exemple, on range 5 livres distincts de $5! = 120$ façons (Exemple 17.5).

- **Exemple 17.6 (anagrammes) :** une anagramme d'un mot est un mot formé des mêmes lettres, chacune autant de fois. On numérote les lettres de ELLE, on compte les $4! = 24$ mots numérotés, et chaque anagramme provient de $2! \times 2! = 4$ d'entre eux : il y a $24/4 = 6$ anagrammes. De même, un mot de n lettres dont les lettres distinctes figurent $n_1, \dots, n_r$ fois a $n!/(n_1! \cdots n_r!)$ anagrammes.

4 Combinaisons

- **Définition 17.6 et Théorème 17.6 (combinaisons) :** une combinaison de p éléments de E est une partie de E à p éléments : l'ordre ne compte pas, sans répétition. Si $\mathrm{Card}\,(E) = n$ et $0 \leq p \leq n$, leur nombre est le coefficient binomial

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

(on lit p *parmi* n ; on le note aussi C_n^p). Ce nombre vient de $A_n^p = p! \times \binom{n}{p}$ pour $1 \leq p \leq n$: chaque partie à p éléments provient de $p!$ arrangements.

- **Remarque 17.4 ($p > n$) :** pour $p > n$, il n'y a aucune partie à p éléments, et l'on ne définit pas $\binom{n}{p}$.
- **Exemple 17.7 (calculs) :** $\{1, 2, 3, 4\}$ a $\binom{4}{2} = 6$ parties à deux éléments. Un comité de 3 personnes parmi 10 est une partie : $\binom{10}{3} = 120$; si les rôles sont distincts, c'est un arrangement : $A_{10}^3 = 720 = 3! \times 120$.
- **Tableau récapitulatif :** quand on choisit p éléments parmi les n éléments de E, on se demande si l'ordre compte et si l'on peut répéter un élément.

	Avec répétition	**Sans répétition**
L'ordre compte	p-listes : n^p	arrangements : A_n^p
L'ordre ne compte pas		combinaisons : $\binom{n}{p}$

Les nombres viennent des Théorèmes 17.4, 17.5 et 17.6, avec $1 \leq p \leq n$ pour les arrangements et $0 \leq p \leq n$ pour les combinaisons. Les permutations sont les arrangements de n éléments parmi n : il y en a $n!$ (Corollaire 17.1). La case vide (avec répétition, sans ordre) correspond aux combinaisons avec répétition, qui ne sont pas étudiées dans cette leçon.

5 Propriétés des coefficients binomiaux

- **Théorème 17.7 (propriétés) :** soit $n \geq 0$. (i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, et $\binom{n}{1} = n$ si $n \geq 1$. (ii) *Symétrie* : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ pour $0 \leq p \leq n$. (iii) *Formule de Pascal* : si $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

- **Remarque 17.5 (preuve par le calcul) :** la symétrie et la formule de Pascal se vérifient aussi sur la formule du Théorème 17.6. **Triangle de Pascal :** chaque nombre intérieur ($1 \leq p \leq n-1$) est la somme de celui du dessus et de celui du dessus à gauche, et les extrémités valent 1 (Théorème 17.7 (i)) ; à la ligne $n = 5$, $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

- **Théorème 17.8 (binôme de Newton) :** pour x, y réels ou complexes et $n \geq 0$, avec la convention $z^0 = 1$ pour tout nombre z,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

soit, pour $n \geq 3$, $(x+y)^n = y^n + \binom{n}{1} xy^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + x^n$.

- **Exemple 17.8 (développements) :** avec la ligne $n = 4$, $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$; avec la ligne $n = 3$, $(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.
- **Corollaire 17.2 (sommes) :** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ pour tout $n \geq 0$ ($x = y = 1$), et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ si $n \geq 1$ ($x = -1$, $y = 1$).
- **Théorème 17.9 (nombre de parties) :** l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E à n éléments a 2^n éléments.

6 Tirages

- **Remarque 17.6 (trois façons de tirer) :** on tire p boules parmi n boules discernables. (i) *Successivement avec remise* ($p \geq 1$) : un résultat est une p-liste, il y en a n^p. (ii) *Successivement sans remise* ($1 \leq p \leq n$) : un résultat est un arrangement, il y en a A_n^p. (iii) *Simultanément* ($0 \leq p \leq n$) : un résultat est une partie à p éléments, il y en a $\binom{n}{p}$. Un tirage *au hasard* munit l'ensemble des résultats de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). On précise le modèle avant de compter.
- **Remarque 17.7 (au moins, au plus, exactement) :** *au moins un* se compte souvent par le complémentaire, *aucun* (Théorème 17.1 (i)) ; *exactement k* se compte souvent par un produit (Théorème 17.2 et Remarque 17.1, comme à l'Exemple 17.9) ; *au plus k* se compte en séparant les cas *exactement* 0, ..., *exactement k* (Théorème 17.1 (iii)).

- **Exemple 17.9 (boules rouges et vertes) :** on tire simultanément, au hasard, 3 boules parmi 5 rouges et 3 vertes. *Univers* : $\binom{8}{3} = 56$ parties. *Exactement deux rouges* : $\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = 30$. *Au moins une rouge* : $56-1 = 55$, car seul le tirage des 3 vertes n'en contient aucune. *Au plus une rouge* : $1+\binom{5}{1}\times\binom{3}{2} = 16$. *Probabilités* : par le Théorème 7.2 du cours 7 [1], $\mathbf{P}$ (exactement deux rouges) $= \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$ et $\mathbf{P}$ (au moins une rouge) $= \frac{55}{56}$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.