Fiche de révision : Les Matrices

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 18.1*, *Théorème 18.1*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 18 [4], sur les matrices. Un renvoi comme *Théorème 1.4 du cours 1* désigne un énoncé numéroté d'un autre cours : le cours sur les suites numériques [1], le cours sur les vecteurs et la géométrie dans le plan et l'espace [2], ou le cours sur le dénombrement [3]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Les matrices sont à coefficients réels, et n, p, q désignent des entiers naturels non nuls.

1 Matrices et premières opérations

- **Définition 18.1 (matrice, type) :** une matrice de type (n,p) est un tableau $A=(a_{ij})$ de réels à n lignes et p colonnes ; a_{ij} est le coefficient de la ligne i et de la colonne j. L'ensemble des matrices de type (n,p) est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Deux matrices sont égales si elles ont le même type et les mêmes coefficients.
- **Définition 18.2 (matrices particulières) :** matrice colonne ($p=1$), matrice ligne ($n=1$), matrice nulle $0_{n,p}$ (ou 0). Si $n=p$, la matrice est carrée d'ordre n, et ses coefficients diagonaux sont $a_{11},\ldots,a_{nn}$; l'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice carrée est diagonale si $a_{ij}=0$ pour $i\neq j$, triangulaire supérieure (resp. inférieure) si $a_{ij}=0$ pour $i>j$ (resp. $i<j$). La matrice identité I_n (ou I) est la matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux valent 1.
- **Définition 18.3 (transposée, matrice symétrique) :** la transposée de $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice $A^{\mathrm{T}}=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij}=a_{ji}$: les lignes de A deviennent les colonnes de A^{T}. Une matrice carrée A est symétrique si $A^{\mathrm{T}}=A$.
- **Définition 18.4 (somme, produit par un réel) :** pour A, $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ réel, $A+B$ a pour coefficients $a_{ij}+b_{ij}$, et λA a pour coefficients λa_{ij}. L'opposée de A est $-A=(-1)\,A$, et $A-B=A+(-B)$. La somme de deux matrices de types différents n'est pas définie.
- **Théorème 18.1 (règles de calcul) :** pour A, B, $C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ,

μ réels : (i) la somme est commutative et associative, et 0 est élément neutre : $A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$, $A+0=0+A=A$; $A+(-A)=0$; (ii) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$, $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$, $1A=A$; (iii) $\lambda A=0$ si et seulement si $\lambda=0$ ou $A=0$; (iv) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$, $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$, $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=A$.

2 Produit de matrices

- **Définition 18.5 et Remarque 18.1 (produit) :** pour $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, le produit AB est la matrice $C\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ de coefficients

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

  Le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. On le calcule *ligne par colonne* : c_{ij} s'obtient en multipliant terme à terme la ligne i de A et la colonne j de B, puis en additionnant.

- **Théorème 18.2 (règles du produit) :** pour des matrices dont les types permettent les calculs écrits, et λ réel : (i) $(AB)C=A(BC)$ (associativité, admise) ; (ii) $A(B+C)=AB+AC$ et $(A+B)C=AC+BC$; (iii) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$; (iv) $AI_p=I_nA=A$ si $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (l'identité est élément neutre) ; (v) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

- **Définition 18.6 (matrices qui commutent) :** deux matrices carrées A et B de même ordre commutent si $AB=BA$.

- **Remarque 18.2 (trois pièges) :** soient (Exemple 18.5)

$$N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad N'=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ ;\ \text{alors}$$

$$NN=N'N'=0,\quad NN'=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad N'N=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

  - Le produit n'est pas commutatif : $NN'\neq N'N$.
  - Un produit peut être nul sans qu'aucun facteur ne le soit : $NN=0$ et $N\neq 0$. On ne peut donc pas simplifier : $NN=N0$, mais $N\neq 0$.
  - Les identités remarquables des réels sont fausses en général : $(N+N')(N+N')=I_2$, alors que $NN+2NN'+N'N'=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$.

3 Puissances d'une matrice carrée

- **Définition 18.7 (puissances) :** pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $A^0=I_n$ et, pour tout entier $k\geq 0$, $A^{k+1}=A^kA$. Ainsi $A^1=A$ et $A^2=AA$.

- **Théorème 18.3 (règles des puissances) :** soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k, m des entiers naturels. (i) $A^k A^m = A^{k+m}$ et $\left(A^k\right)^m = A^{km}$. (ii) *Si* $AB = BA$, alors $A^k B = BA^k$ et $(AB)^k = A^k B^k$. (iii) *Si* $AB = BA$, la formule du binôme est vraie :

$$(A+B)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} A^j B^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} A^{m-j} B^j.$$

  C'est, pour des matrices, la formule du Théorème 17.8 du cours 17 [3]. Elle peut être fausse pour des matrices qui ne commutent pas (Remarque 18.2 du cours 18 [4]).

- **Théorème 18.4 (puissances d'une matrice diagonale) :** si D est diagonale, de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_n$, alors, pour tout entier $k \geq 0$, D^k est diagonale, de coefficients diagonaux $d_1^k, \ldots, d_n^k$ (avec la convention $0^0 = 1$). Par exemple, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$ (Exemple 18.6).

- **Exemple 18.7 (une application du binôme) :** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N$, où I et N commutent et $N^j = 0$ pour $j \geq 2$; d'où $A^k = I + kN = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $k \geq 0$.

4 Déterminant et matrice inverse

- **Définition 18.8 (déterminant d'ordre 2 et 3) :** (i) Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

  (ii) Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on développe selon la première ligne :

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

- **Remarque 18.3 (autres développements) :** on admet qu'on obtient le même nombre en développant selon n'importe quelle ligne ou colonne, le coefficient a_{ij} étant affecté du signe $(-1)^{i+j}$: on choisit la ligne ou la colonne qui a le plus de zéros. La règle de Sarrus donne aussi $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

- **Théorème 18.5 (déterminant d'un produit) :** pour A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \in \{2, 3\}$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, et $\det(I_n) = 1$ (pour $n = 3$, l'égalité $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ est admise).

- **Définition 18.9 et Théorème 18.6 (matrice inversible) :** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$. Cette matrice B est alors unique : c'est l'inverse de A, noté A^{-1}. Si A est inversible, $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; si A et B sont inversibles, AB l'est aussi, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- **Théorème 18.7 (inverse d'ordre 2) :** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et alors
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
Par exemple, $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, et l'inverse de cette matrice est $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ (Exemple 18.9).
- **Théorème 18.8 (inversibilité en ordre 3) :** $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ (que $\det(A) \neq 0$ entraîne A inversible est admis).
- **Théorème 18.9 et Corollaire 18.1 (méthode du produit kI) :** soient $n \in \{2, 3\}$ et A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $AB = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$: il suffit de vérifier *un* produit. Si $AB = kI_n$ avec k réel *non nul*, alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{k}B$. Par exemple (Exemple 18.10),
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3I_3,$$
donc l'inverse de la première matrice est le tiers de la seconde.
- **Remarque 18.4 (comatrice) :** pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \{2, 3\}$, on admet que, si $\det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\operatorname{com} A)^{\mathrm{T}}$, où le coefficient d'indices i, j de $\operatorname{com} A$ est $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A (en ordre 2, cette matrice n'a qu'un coefficient, et son déterminant est, par convention, ce coefficient).

5 Systèmes linéaires

- **Définition 18.10 (système linéaire) :** un système de n équations à p inconnues $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i$ $(1 \leq i \leq n)$ s'écrit $AX = B$, avec
$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$
Deux systèmes sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

- **Théorème 18.10 (système de matrice inversible) :** si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *inversible* et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ a une solution et une seule : $X = A^{-1}B$.
- **Théorème 18.11 et Remarque 18.5 (deux équations, deux inconnues) :** soit $AX = B$, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si $\det(A) \neq 0$, le système a une solution et une seule. Si $\det(A) = 0$, il n'a aucune solution, ou il en a une infinité. Si aucune ligne de A n'est nulle, chaque équation est celle d'une droite, et $\det(A)$ est le nombre δ du Théorème 14.14 du cours 14 [2]. Les droites sont sécantes si $\delta \neq 0$; elles sont confondues (une infinité de solutions) ou strictement parallèles (aucune solution) si $\delta = 0$.
- **Théorème 18.12 (opérations sur les équations) :** on obtient un système équivalent si l'on échange deux équations, si l'on multiplie une équation par un réel *non nul*, ou si l'on ajoute à une équation un multiple d'une *autre* équation.
- **Remarque 18.6 (méthode de Gauss) :** on élimine x_1 des équations 2 à n, puis x_2 des équations 3 à n, etc. ; on obtient un système triangulaire, qu'on résout en remontant, de la dernière équation à la première. Si le pivot est nul, on échange deux équations ; s'il est nul dans toutes les équations restantes, on passe à l'inconnue suivante. Si une équation devient $0 = c$ avec $c \neq 0$, le système n'a pas de solution ; si elle devient $0 = 0$, on la supprime ; s'il reste moins d'équations que d'inconnues, le système, s'il a une solution, en a une infinité. On écrit les opérations au-dessus des flèches, par exemple $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ (Exemple 18.12), et on vérifie la solution en la reportant dans le système.

6 Matrices diagonalisables et suites

- **Définition 18.11 (matrice diagonalisable) :** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *inversible* et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonale* telles que $A = PDP^{-1}$.
- **Théorème 18.13 (puissances d'une matrice diagonalisable) :** si $A = PDP^{-1}$, avec P inversible, alors $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout entier $k \geq 0$; si D est diagonale, D^k se calcule par le Théorème 18.4.
- **Remarque 18.7 (trouver P et D) :** dans les exercices, P et D sont données. On vérifie que P est inversible ($\det(P) \neq 0$), on calcule P^{-1}, puis on vérifie que $PDP^{-1} = A$, ou, ce qui revient au même, que $AP = PD$. Trouver soi-même P et D dépasse le programme.
- **Exemple 18.13 (calcul de A^k) :** avec

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on a $\det(P) = -1 \neq 0$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $PDP^{-1} = A$, et $A^k = P\begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}P^{-1}$ pour tout $k \geq 0$.

- **Théorème 18.14 (suite $U_{k+1} = AU_k$) :** si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(U_k)_{k\geq 0}$ est une suite de matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $U_{k+1} = AU_k$ pour tout $k \geq 0$, alors $U_k = A^k U_0$ pour tout $k \geq 0$. C'est l'analogue du Théorème 1.4 du cours 1 [1], sur les suites géométriques. Deux suites liées $x_{k+1} = ax_k + by_k$, $y_{k+1} = cx_k + dy_k$ s'écrivent ainsi, avec $U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (Exemple 18.14).
- **Remarque 18.8 (application linéaire du plan) :** dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, l'application linéaire de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe à tout point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si f a pour matrice A et g pour matrice B, alors $g \circ f$ a pour matrice BA. Si A est inversible, f est une bijection, et sa réciproque a pour matrice A^{-1}. Par exemple, la symétrie de centre O a pour matrice $-I_2$ (Exemple 18.15).

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 18. Les matrices, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.