Fiche de révision : Logique et Ensembles

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 19.1*, *Théorème 19.1*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 19 [5], sur la logique et les ensembles. Un renvoi comme *Théorème 17.9 du cours 17* désigne un énoncé numéroté d'un autre cours : le cours sur les suites numériques [1], le cours sur la fonction exponentielle [2], le cours sur les probabilités [3], ou le cours sur le dénombrement [4]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Assertions et connecteurs

- **Définition 19.1 et Remarque 19.1 (assertion, prédicat) :** une assertion est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux ; sa valeur de vérité est V (vrai) ou F (faux). Un prédicat est un énoncé $P(x)$ qui dépend d'une variable x prise dans un ensemble E, et qui devient une assertion chaque fois que l'on donne à x une valeur de E. Par exemple, pour $n \in \mathbb{Z}$, "n est pair" est un prédicat $P(n)$: $P(6)$ est vraie et $P(5)$ est fausse. Écrire une assertion dans un énoncé ou une preuve, c'est affirmer qu'elle est vraie ; pour en parler sans l'affirmer, on dit "soit A une assertion".
- **Définition 19.2 (connecteurs) :** soient A et B deux assertions. La négation non A, la conjonction A et B, la disjonction A ou B, l'implication $A \Rightarrow B$ et l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ sont définies par la table de vérité

A	B	non A	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

  Le "ou" est inclusif : A ou B est vraie si au moins l'une des deux est vraie. L'implication $A \Rightarrow B$ n'est fausse que si A est vraie et B fausse. L'équivalence $A \Leftrightarrow B$ est vraie si A et B ont la même valeur de vérité.
- **Remarque 19.2 (vocabulaire de l'implication) :** $A \Rightarrow B$ se lit "si A, alors B" ; A est une condition suffisante pour B, et B une condition

nécessaire pour A. L'implication $B \Rightarrow A$ est la réciproque de $A \Rightarrow B$. $A \Leftrightarrow B$ se lit "A équivaut à B" ou "A si et seulement si B". Si A est fausse, $A \Rightarrow B$ est vraie quelle que soit B. Une implication peut être vraie et sa réciproque fausse : pour x réel, $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ est vraie, mais $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ est fausse pour $x = -2$ (Exemple 19.2).

- **Théorème 19.1 (lois logiques) :** soient A, B, C des assertions ; quelles que soient leurs valeurs de vérité :

  (i) A ou (non A) est vraie, et A et (non A) est fausse ;

  (ii) non (non A) $\Leftrightarrow A$ (double négation) ;

  (iii) De Morgan :

  $$\text{non}\,(A \text{ et } B) \Leftrightarrow (\text{non } A \text{ ou non } B)\,,$$
  $$\text{non}\,(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (\text{non } A \text{ et non } B)\ ;$$

  (iv) distributivité :

  $$(A \text{ et } (B \text{ ou } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C))\,,$$
  $$(A \text{ ou } (B \text{ et } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C))\ ;$$

  (v) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } A \text{ ou } B)$;

  (vi) non $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A$ et non $B)$ (négation d'une implication, qui n'est pas une implication) ;

  (vii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$: une implication équivaut à sa contraposée, pas à sa réciproque ;

  (viii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A))$ (double implication).

  Par exemple, pour x réel, la négation de "$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$" est "$x > 2$ et $x^2 \leq 4$", et sa contraposée est "$x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$" (Exemple 19.3).

2 Quantificateurs

- **Définition 19.3 (quantificateurs) :** soit $P(x)$ un prédicat, x étant pris dans un ensemble E. L'assertion $\forall x \in E,\ P(x)$ ("pour tout x de E", ou "quel que soit x de E") est vraie si $P(x)$ est vraie pour chaque élément x de E. L'assertion $\exists x \in E,\ P(x)$ ("il existe x dans E tel que") est vraie si $P(x)$ est vraie pour au moins un élément de E. L'assertion $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ est vraie si $P(x)$ est vraie pour exactement un élément de E : il en existe un (existence), et deux éléments de E qui vérifient P sont égaux (unicité).

- **Remarque 19.3 (variable liée, variable libre) :** dans $\forall x \in E,\ P(x)$, la variable x est liée (muette) : on peut la renommer sans changer le sens. Un énoncé sans variable libre est une assertion ; un énoncé qui a une seule variable libre est un prédicat. Ainsi, "pour tout entier n, si n est impair, alors n^2 est impair" est une assertion (vraie), alors que "n est impair" est un prédicat.

- **Exemple 19.4 (ordre des quantificateurs) :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y=0$ est vraie ($y=-x$ dépend de x), alors que $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x+y=0$ est fausse. Échanger $\forall$ et $\exists$ change le sens.
- **Théorème 19.2 (négation des quantificateurs) :**

$$\text{non}\left(\forall x \in E,\ P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\exists x \in E,\ \text{non}\ P(x)\right),$$
$$\text{non}\left(\exists x \in E,\ P(x)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in E,\ \text{non}\ P(x)\right).$$

  Pour nier un énoncé quantifié, on échange $\forall$ et $\exists$, on garde l'ordre des variables, *et* l'on remplace le prédicat par sa négation. Dire que $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ est fausse, c'est dire qu'aucun x ne vérifie $P(x)$, ou qu'au moins deux le vérifient. Par exemple, une suite (U_n) est majorée si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq M$ (Définition 1.3 du cours 1 [1]) ; elle n'est pas majorée si et seulement si $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ U_n > M$ (Exemple 19.5).

3 Raisonnements

- **Théorème 19.3 (raisonnements) :** soient A, B, C des assertions.
  (i) Raisonnement direct : si A et $A \Rightarrow B$ sont vraies, alors B est vraie.
  (ii) Contraposée : si non $B \Rightarrow$ non A est vraie, alors $A \Rightarrow B$ est vraie.
  (iii) Raisonnement par l'absurde : si non $A \Rightarrow B$ est vraie et B est fausse, alors A est vraie.
  (iv) Disjonction des cas : si A ou B, $A \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow C$ sont vraies, alors C est vraie.
  (v) Double implication : si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont vraies, alors $A \Leftrightarrow B$ est vraie.
  (vi) Contre-exemple : soit $P(x)$ un prédicat, x étant pris dans un ensemble E ; s'il existe $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse, alors $\forall x \in E,\ P(x)$ est fausse.
- **Remarque 19.4 (démontrer en pratique) :** pour montrer $\forall x \in E,\ P(x)$, on écrit "soit $x \in E$", sans rien supposer d'autre sur x, et l'on montre $P(x)$. Pour montrer $\exists x \in E,\ P(x)$, il suffit de donner un élément x_0 de E et de vérifier $P(x_0)$. Pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A vraie et l'on montre B. Par l'absurde, on suppose non A et l'on en déduit une assertion que l'on sait fausse, souvent de la forme "C et non C" : c'est une contradiction, et A est vraie. Pour montrer une propriété pour tout entier $n \geq 0$, on peut raisonner par récurrence (Théorème 1.13 et Remarque 1.5 du cours 1 [1]).
- **Exemples 19.6 à 19.10 (modèles) :** si $n \in \mathbb{Z}$ est impair, $n = 2k+1$ et $n^2 = 2\left(2k^2+2k\right)+1$ est impair (direct) ; si n^2 est pair, n est pair (contraposée de l'implication précédente) ; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (par l'absurde) ; $n(n+1)$ est pair (cas n pair, cas n impair) ; "pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2+n+41

est premier" est fausse, car $40^2+40+41=41^2$ (contre-exemple). Vérifier un énoncé sur des exemples ne le démontre pas ; un seul contre-exemple suffit à le réfuter.

4 Ensembles

- **Remarque 19.5 et Définition 19.4 (ensembles) :** un ensemble est une collection d'objets, ses éléments ; on note $a \in E$ ou $a \notin E$ (théorie naïve : la notion d'ensemble n'est pas définie). Un ensemble se décrit en extension, par la liste de ses éléments, où l'ordre et les répétitions ne comptent pas ($\{1,2,3\}=\{3,1,2\}$), ou en compréhension : $\{x \in E : P(x)\}$ est l'ensemble des éléments x de E pour lesquels $P(x)$ est vraie. Un singleton $\{a\}$ a un seul élément ; l'ensemble vide $\emptyset$ n'en a aucun.
- **Définition 19.5 (égalité, inclusion) :** $A=B$ si A et B ont les mêmes éléments ; $A \subset B$ (A est une partie de B) si tout élément de A est un élément de B. L'inclusion est large : $A \subset A$.
- **Théorème 19.4 (double inclusion, ensemble vide) :** (i) $A=B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$; (ii) un ensemble vide est inclus dans tout ensemble ; (iii) il existe un seul ensemble vide.
- **Définition 19.6 et Remarque 19.6 (ensemble des parties) :** $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E : $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$. Il contient $\emptyset$ et E. Par exemple, $\mathcal{P}(\{1,2\})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$; on écrit $1 \in \{1,2\}$ et $\{1\} \subset \{1,2\}$, mais pas $\{1\} \in \{1,2\}$ ni $1 \subset \{1,2\}$ (Exemple 19.11). Si E est fini à n éléments, $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments (Théorème 17.9 du cours 17 [4]).

5 Opérations sur les ensembles

- **Définition 19.7 (opérations) :** soient A et B deux parties d'un ensemble E.

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

  Le complémentaire de A *dans* E est $\bar{A}=E\setminus A=\{x \in E : x \notin A\}$. A et B sont disjoints si $A \cap B=\emptyset$. Pour des parties $A_1,\ldots,A_n$ de E, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ (resp. $A_1 \cap \cdots \cap A_n$) est formé des $x \in E$ qui sont dans au moins un A_i (resp. dans tous les A_i).
- **Théorème 19.5 (lois ensemblistes) :** pour des parties A, B, C de E, les complémentaires étant pris dans E : (i) $\overline{\bar{A}}=A$; (ii) $\overline{A \cup B}=\bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B}=\bar{A} \cup \bar{B}$ (De Morgan) ; (iii) $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité) ; (iv) $A \setminus B=A \cap \bar{B}$, et A est la réunion des parties disjointes $A \cap B$ et $A \setminus B$. Ces lois traduisent

les lois logiques du Théorème 19.1 : “ou” donne $\cup$, “et” donne $\cap$, “non” donne le complémentaire.

- **Remarque 19.7 (partition) :** des parties de E deux à deux disjointes dont la réunion est E forment une partition de E ; par exemple, A et $\bar{A}$. Cette notion sert pour les événements (Définition 7.5 du cours 7 [3]).

6 Produit cartésien

- **Définition 19.8 (couple, produit cartésien) :** un couple (x, y) est formé d'un premier élément x et d'un second élément y, et $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$. Le produit cartésien de E et F est l'ensemble des couples
$$E \times F = \{(x, y) : x \in E,\ y \in F\}.$$
De même, $E_1 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_i \in E_i$ pour tout i, et $E^n = E \times \cdots \times E$ (n facteurs).
- **Exemple 19.14 (l'ordre compte) :** $(1, 2) \neq (2, 1)$, alors que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. Avec $E = \{a, b\}$ ($a \neq b$, non numériques) et $F = \{1, 2, 3\}$, $E \times F$ a 6 couples, et $E \times F \neq F \times E$: $(a, 1) \in E \times F$, mais $(a, 1) \notin F \times E$.

7 Applications

- **Définition 19.9 (application, image, antécédent) :** une application $f : E \to F$ associe à chaque $x \in E$ un unique élément $f(x)$ de F, l'image de x ; si $f(x) = y$, x est un antécédent de y. Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.
- **Définition 19.10 (bijection, réciproque) :** $f : E \to F$ est une bijection de E sur F si tout élément de F a exactement un antécédent :
$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y.$$
La réciproque $f^{-1} : F \to E$ associe alors à chaque $y \in F$ son unique antécédent.
- **Théorème 19.6 (réciproque) :** si $f : E \to F$ est une bijection, (i) pour tous $x \in E$ et $y \in F$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$; (ii) $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in E$, et $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ pour tout $y \in F$; (iii) f^{-1} est une bijection de F sur E, de réciproque f.
- **Exemple 19.15 (les ensembles font partie de l'application) :** $x \mapsto 2x + 3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $y \mapsto \dfrac{y - 3}{2}$. La formule x^2 ne définit pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (-1 n'a pas d'antécédent, 4 en a deux), mais elle définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, de réciproque $y \mapsto \sqrt{y}$.

- **Remarque 19.8 (où l'on retrouve les bijections) :** le logarithme est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque exp (Définition 6.1 et Théorème 6.1 (iii) du cours 6 [2]). On compte un ensemble en le mettant en bijection avec un ensemble déjà compté (Remarque 17.1 du cours 17 [4]).

8 Ensembles finis et infinis

- **Remarque 19.9 (cardinaux) :** les ensembles finis et leur cardinal $\mathrm{Card}(E)$, avec $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$, sont définis par la Définition 17.1 du cours 17 [4]. Soient E un ensemble *fini*, et A, B deux parties de E. Alors

$$\begin{gathered}\mathrm{Card}\left(\bar{A}\right) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A),\\ \mathrm{Card}(B \setminus A) = \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B),\\ \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B),\\ \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}\end{gathered}$$

  (Théorème 17.1, Propriété 17.1 (ii) et (iii) avec le Théorème 19.5 (iv) pour la deuxième, et Théorème 17.9 du cours 17 [4]). Pour des ensembles *finis* $E_1, \ldots, E_k$, $k \geq 2$, $\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_k) = \mathrm{Card}(E_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}(E_k)$ (Théorème 17.2 du cours 17 [4]).
- **Définition 19.11 (ensemble infini) :** un ensemble non fini est dit infini.
- **Théorème 19.7 (plus grand élément) :** toute partie finie non vide A de $\mathbb{R}$ a un plus grand élément m : $m \in A$ et $x \leq m$ pour tout $x \in A$.
- **Exemple 19.16 (un ensemble infini) :** $\mathbb{N}$ est infini. Par l'absurde : s'il était fini, comme il est non vide ($0 \in \mathbb{N}$), il aurait un plus grand élément N (Théorème 19.7), et $N + 1 \in \mathbb{N}$ serait plus grand. De même, l'ensemble des multiples de 15 dans $\mathbb{N}$ est infini (il contient $0 = 15 \times 0$).

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 19. Logique et ensembles, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.