Fiche de révision : Isométries du Plan

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés renvoient au cours 20 [6], sur les isométries du plan : *Définition 20.1*, *Théorème 20.1*, etc. désignent ses énoncés numérotés. Un renvoi comme *Théorème 12.15 du cours 12* désigne un énoncé numéroté d'un autre cours : le cours sur les nombres complexes [1], le cours sur les vecteurs et la géométrie [2], le cours sur le produit scalaire [3], le cours sur les matrices [4], ou le cours sur la logique et les ensembles [5]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Applications du plan

- **Conventions :** $\mathcal{P}$ est le plan, muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans lequel on prend les affixes (Définition 12.4 du cours 12 [1]). Pour $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ sont les arguments de $\frac{d-c}{b-a}$ (Théorème 12.15 du cours 12 [1]) ; elles sont égales à 2π près. Pour $A \neq B$, la médiatrice de $[AB]$ est la perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$; c'est l'ensemble des points équidistants de A et de B (Théorème 12.8 (ii) du cours 12 [1]). L'angle géométrique $\widehat{BAC}$, noté avec un chapeau, est à valeurs dans $[0, \pi]$ (Définition 15.2 du cours 15 [3]).
- **Définition 20.1 et Remarque 20.1 (composée, identité, point invariant, involution) :** une application du plan est une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ (Définition 19.9 du cours 19 [5]) ; on note $M' = f(M)$. La composée $g \circ f$ associe à M le point $g(f(M))$: on applique d'abord f, puis g. L'identité Id associe à M le point M. Le point M est invariant par f (f fixe M) si $f(M) = M$, et f est une involution si $f \circ f = \mathrm{Id}$. En général, $g \circ f \neq f \circ g$; si $g \circ f = f \circ g$, on dit que f et g commutent.
- **Théorème 20.1 (règles de la composition) :** soient f, g, h des applications du plan.
  (i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, que l'on note $h \circ g \circ f$.
  (ii) $f \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ f = f$.
  (iii) Si f est une bijection, $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$.

(iv) Si $g \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}$, alors f est une bijection et $f^{-1} = g$. Une involution est donc une bijection, égale à sa réciproque.

(v) Si f et g sont des bijections, $g \circ f$ est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(vi) Si f est une bijection, $g = f^{-1}$ si et seulement si $f \circ g = \mathrm{Id}$. Si h est une bijection, $h \circ f = h \circ g$ si et seulement si $f = g$.

2 Transformations usuelles

- **Définitions 20.2 et 20.3 (translation, symétrie centrale) :** la translation $t_{\overrightarrow{w}}$ associe à M l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}$ (Théorème 14.1 (i) du cours 14 [2]) ; $t_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}$. La symétrie de centre I, notée S_I, associe à M le point M' tel que I soit le milieu de $[MM']$; $S_I(I) = I$.

- **Définition 20.4 et Théorème 20.2 (symétrie orthogonale) :** la symétrie orthogonale d'axe la droite $\mathcal{D}$, notée $S_{\mathcal{D}}$, associe à M le point M' tel que le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$ soit le milieu de $[MM']$. Alors $S_{\mathcal{D}}(M) = M$ si et seulement si $M \in \mathcal{D}$; et, si $M \notin \mathcal{D}$, $M' = S_{\mathcal{D}}(M)$ si et seulement si $M' \neq M$ et $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[MM']$.

- **Définition 20.5 et Remarque 20.2 (rotation) :** soient Ω un point et θ un réel quelconque. La rotation $r(\Omega, \theta)$ associe à Ω le point Ω, et à tout point $M \neq \Omega$ le point M' tel que $\Omega M' = \Omega M$ et que θ soit une mesure de $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$; ce point existe et il est unique (Théorème 20.4 (ii)). Les Définitions 20.2 à 20.5 sont celles qu'emploient les Théorèmes 12.7 (iv) et 12.18 du cours 12 [1].

- **Théorème 20.3 (affixes, produit scalaire, droites) :** si $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ ont pour affixes a et b, alors $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w'} = \mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right)$, et ils sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right) = 0$. Toute droite a un vecteur directeur d'affixe $e^{\boldsymbol{i}\alpha}$, avec α réel, et les réels qui conviennent sont alors les $\alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- **Théorème 20.4 et Remarque 20.3 (écritures complexes) :** soient Ω d'affixe ω, $\overrightarrow{w}$ d'affixe c, θ un réel, et $\mathcal{D}$ la droite passant par Ω de vecteur directeur d'affixe $e^{\boldsymbol{i}\alpha}$. Pour M et M' d'affixes z et z' :

$M' = t_{\overrightarrow{w}}(M)$	$z' = z + c$
$M' = r(\Omega, \theta)(M)$	$z' - \omega = e^{\boldsymbol{i}\theta}(z - \omega)$
$M' = S_\Omega(M)$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
$M' = S_{\mathcal{D}}(M)$	$z' - \omega = e^{2\boldsymbol{i}\alpha}\,\overline{z - \omega}$

  Chaque condition équivaut à la formule. En particulier, $S_\Omega = r(\Omega, \pi)$, et S_O a pour matrice $-I_2$ (Remarque 20.3, Exemple 18.15 du cours 18 [4]).

- **Théorème 20.5 (composées et réciproques) :** (i) $t_{\overrightarrow{w'}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}}$, et $t_{\overrightarrow{w}}$ est une bijection de réciproque $t_{-\overrightarrow{w}}$; (ii) $r(\Omega, \theta') \circ r(\Omega, \theta) =$

$r(\Omega, \theta+\theta')$, $r(\Omega, 0) = \mathrm{Id}$, $r(\Omega, \theta)$ est une bijection de réciproque $r(\Omega, -\theta)$, et $r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta')$ si et seulement si $\theta = \theta'$ $[2\pi]$; (iii) S_Ω et $S_\mathcal{D}$ sont des involutions.

3 Isométries

- **Définition 20.6 et Théorème 20.6 (isométrie) :** une isométrie est une application du plan f qui conserve les distances : $M'N' = MN$ pour tous points M et N. L'identité, les translations, les rotations, les symétries centrales et les symétries orthogonales sont des isométries.
- **Théorèmes 20.7 et 20.8 (produit scalaire et combinaisons linéaires) :** une application du plan f est une isométrie si et seulement si, pour tous points A, B, C, on a $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Si f est une isométrie, alors, pour tous points A, B, C, D, E, F et tous réels x, y,

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \qquad \overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{C'D'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{E'F'}.$$

- **Corollaire 20.1 (configurations) :** une isométrie conserve les milieux ; A, B, C sont alignés si et seulement si A', B', C' le sont ; pour $A \neq B$, l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$; les images de deux droites parallèles (resp. perpendiculaires) sont parallèles (resp. perpendiculaires) ; pour $B \neq A$ et $C \neq A$, $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$; l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme ; l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$, de même longueur.
- **Théorème 20.9 (bijectivité) :** soient f et g des isométries. (i) Si $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère orthonormé, $\left(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ en est un, et l'image d'un point de coordonnées (x, y) dans le premier a les coordonnées (x, y) dans le second. (ii) f est une bijection et f^{-1} est une isométrie : une isométrie est une transformation (Définition 12.7 du cours 12 [1]). (iii) $g \circ f$ est une isométrie. (iv) L'image du cercle de centre I et de rayon R est le cercle de centre I' et de rayon R.
- **Théorème 20.10 (caractérisation par trois points) :** soient A, B, C trois points non alignés. Deux isométries qui ont les mêmes images en A, B et C sont égales ; une isométrie qui fixe A, B et C est l'identité.
- **Exemple 20.2 (l'ordre compte) :** pour $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, $t_{\overrightarrow{w}} \circ S_\Omega = S_J$ avec $J = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\Omega)$, et $S_\Omega \circ t_{\overrightarrow{w}} = S_{J'}$ avec $J' = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\Omega)$: elles diffèrent.

4 Composée de deux symétries orthogonales

- **Théorème 20.11 (double d'un angle de droites) :** si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont des vecteurs directeurs d'affixes $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$, alors, pour tous vecteurs directeurs

$\overrightarrow{w}$ de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{w'}$ de $\mathcal{D}'$ et toute mesure θ de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$, $2\theta = 2(\beta - \alpha)\ [2\pi]$: 2θ ne dépend que des deux droites.

- **Théorème 20.12 et Corollaire 20.2 (axes sécants) :** si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en Ω, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$, et si θ est une mesure de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$, alors

$$S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = r(\Omega, 2\theta) \qquad \text{et} \qquad S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'} = r(\Omega, -2\theta).$$

  Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires en Ω, $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'} = S_\Omega$.

- **Théorème 20.13 (axes parallèles) :** si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, H un point de $\mathcal{D}$ et H' son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}'$, alors $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = t_{2\overrightarrow{HH'}}$. En particulier, $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}} = \mathrm{Id}$.

- **Théorème 20.14 et Remarque 20.4 (rotations et translations comme composées) :** (i) si $\mathcal{D}$ passe par Ω, de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$, et si $\mathcal{D}'$ est la droite passant par Ω de vecteur directeur $\overrightarrow{w'}$, où $\frac{\theta}{2}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$, alors $r(\Omega, \theta) = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$; (ii) si $\mathcal{D}$ a un vecteur directeur orthogonal à $\overrightarrow{w}$ et si $\mathcal{D}' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\mathcal{D})$, parallèle à $\mathcal{D}$, alors $t_{\overrightarrow{w}} = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$. Dans une composée de symétries, l'ordre compte : $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'}$ et $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ diffèrent en général.

5 Points invariants et classification

- **Théorèmes 20.15 et 20.16 (points invariants) :** si f est une isométrie et A un point non invariant, d'image A', tout point invariant par f est sur la médiatrice de $[AA']$. Les points invariants de Id sont tous les points ; ceux de $S_{\mathcal{D}}$ sont les points de $\mathcal{D}$; si $\theta \neq 0\ [2\pi]$, Ω est le seul point invariant de $r(\Omega, \theta)$; si $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, $t_{\overrightarrow{w}}$ n'a aucun point invariant.

- **Théorème 20.17 (isométries ayant des points invariants) :** soit f une isométrie. (i) f fixe trois points non alignés si et seulement si $f = \mathrm{Id}$. (ii) Si f fixe deux points distincts A et B, elle fixe tous les points de (AB), et $f = \mathrm{Id}$ ou $f = S_{(AB)}$. (iii) Si f a un point invariant Ω et un seul, $f = r(\Omega, \theta)$ avec $\theta \neq 0\ [2\pi]$.

- **Théorème 20.18 et Définition 20.7 (décomposition, symétrie glissante) :** si f est une isométrie, A un point et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{Af(A)}$, il existe une isométrie g et une seule qui fixe A et telle que $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ g$, à savoir $g = t_{-\overrightarrow{w}} \circ f$. Une symétrie glissante est une composée $t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$, où $\overrightarrow{w}$ est un vecteur *non nul* colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$; $\mathcal{D}$ est son axe et $\overrightarrow{w}$ son vecteur.

- **Théorème 20.19 (translation et symétrie orthogonale) :** soient $\mathcal{D}$ une droite, $\overrightarrow{w}$ un vecteur et $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$. (i) Si $\overrightarrow{w}$ est colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$, $t_{\overrightarrow{w}}$ et $S_{\mathcal{D}}$ commutent. (ii) Si $\overrightarrow{w}$ leur est

orthogonal, $f = S_{\mathcal{D}'}$ avec $\mathcal{D}' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\mathcal{D})$. (iii) En général, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$, avec $\overrightarrow{w_1}$ colinéaire et $\overrightarrow{w_2}$ orthogonal aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$, et $f = t_{\overrightarrow{w_1}} \circ S_{\mathcal{D}'}$ avec $\mathcal{D}' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w_2}}(\mathcal{D})$: c'est la symétrie orthogonale $S_{\mathcal{D}'}$ si $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{0}$, et la symétrie glissante d'axe $\mathcal{D}'$ et de vecteur $\overrightarrow{w_1}$ sinon.

- **Théorèmes 20.20 et 20.21 (isométries sans point invariant) :** une symétrie glissante $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$ n'a aucun point invariant, $f \circ f = t_{2\overrightarrow{w}}$, et son axe et son vecteur sont uniques. Une isométrie sans point invariant est une translation de vecteur non nul ou une symétrie glissante, et réciproquement.
- **Théorème 20.22 (classification) :** toute isométrie est d'une et d'une seule des cinq sortes suivantes, et s'écrit comme composée d'au plus trois symétries orthogonales :

Isométrie	Points invariants	Composée de symétries
Id	$\mathcal{P}$	$S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D}$ quelconque
$S_{\mathcal{D}}$	$\mathcal{D}$	$S_{\mathcal{D}}$
$r(\Omega, \theta)$, $\theta \neq 0$ $[2\pi]$	$\{\Omega\}$	$S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$, axes sécants en Ω
$t_{\overrightarrow{w}}$, $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$	$\emptyset$	$S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$, axes parallèles distincts
$t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$ (glissante)	$\emptyset$	$S_{\mathcal{D}''} \circ S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ (voir ci-dessous)

Lignes 3 et 4 : axes du Théorème 20.14 (i) et (ii). Dernière ligne : $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\mathcal{D}')$, parallèles distinctes. Les points invariants forment donc le plan, une droite, un seul point ou aucun point ; jamais deux points seulement.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 15. Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 18. Les matrices, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 19. Logique et ensembles, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray. Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.