Fiche de révision : Déplacements et Antidéplacements

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés renvoient au cours 21 [3], sur les déplacements et les antidéplacements : *Définition 21.1*, *Théorème 21.1*, etc. désignent ses énoncés numérotés. Un renvoi comme *Théorème 20.4 du cours 20* désigne un énoncé numéroté d'un autre cours : le cours sur les nombres complexes [1] ou le cours sur les isométries du plan [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page mohamedkadhem.com/baccalaureat.

1 Déplacements et antidéplacements

- **Conventions :** le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, dans lequel on prend les affixes (Définition 12.4 du cours 12 [1]). Pour une application du plan f, on note $A' = f(A)$, $M' = f(M)$, etc., et a, a', z, z' leurs affixes. Pour $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ sont les arguments de $\frac{d-c}{b-a}$ (Théorème 12.15 du cours 12 [1]) ; elles sont égales à 2π près, et $\theta = \theta'$ $[2\pi]$ note l'égalité modulo 2π. Les transformations Id, $t_{\overrightarrow{w}}$, S_I, $S_{\mathcal{D}}$, $r(\Omega, \theta)$ sont celles des Définitions 20.1 à 20.5 du cours 20 [2]. Dans $g \circ f$, on applique d'abord f, puis g.
- **Définition 21.1 (déplacement, antidéplacement) :** si f est une isométrie et $A \neq B$, alors $A' \neq B'$. On dit que f est un *déplacement* si, pour tous points $A \neq B$ et $C \neq D$, les angles orientés $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ ont les mêmes mesures (f conserve les angles orientés), et un *antidéplacement* si, pour tous points $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures du premier sont les opposées de celles du second (f change les angles orientés en leurs opposés). Toute isométrie conserve les angles géométriques (Remarque 21.1, Corollaire 20.1 (v) du cours 20 [2]).
- **Théorème 21.1 (angles et affixes) :** soient f une isométrie, $A \neq B$, $C \neq D$, $q = \frac{d-c}{b-a}$ et $q' = \frac{d'-c'}{b'-a'}$. Alors $|q'| = |q|$; les deux angles ont les mêmes mesures si et seulement si $q' = q$, et des mesures opposées si et seulement si $q' = \bar{q}$. Ainsi f est un déplacement si et seulement si $q' = q$

pour tous $A \neq B$ et $C \neq D$, et un antidéplacement si et seulement si $q' = \bar{q}$ pour tous $A \neq B$ et $C \neq D$.

- **Théorème 21.2 (transformations usuelles) :** Id, les translations $t_{\overrightarrow{w}}$, les rotations $r(\Omega, \theta)$ et les symétries centrales S_Ω sont des déplacements ; les symétries orthogonales $S_\mathcal{D}$ sont des antidéplacements.
- **Théorème 21.3 (composée et réciproque) :** soient f et g deux isométries, chacune déplacement ou antidéplacement. Si f et g sont deux déplacements, ou deux antidéplacements, $g \circ f$ est un déplacement ; si l'une est un déplacement et l'autre un antidéplacement, $g \circ f$ est un antidéplacement. La réciproque d'un déplacement est un déplacement, celle d'un antidéplacement un antidéplacement.
- **Corollaire 21.1 (composée de symétries orthogonales) :** pour $n \geq 1$, la composée $S_{\mathcal{D}_n} \circ \cdots \circ S_{\mathcal{D}_1}$ de n symétries orthogonales est un déplacement si n est pair, un antidéplacement si n est impair.

2 Classification

- **Théorème 21.4 (classification) :** toute isométrie est un déplacement ou un antidéplacement, et n'est pas les deux. Plus précisément :

Isométrie	Points invariants	Nature	Symétries
Id	$\mathcal{P}$	déplacement	2
$r(\Omega, \theta)$, $\theta \neq 0 \ [2\pi]$	$\{\Omega\}$	déplacement	2
$t_{\overrightarrow{w}}$, $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$	$\emptyset$	déplacement	2
$S_\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	antidéplacement	1
$t_{\overrightarrow{w}} \circ S_\mathcal{D}$ (glissante)	$\emptyset$	antidéplacement	3

La deuxième ligne comprend $S_\Omega = r(\Omega, \pi)$; la dernière colonne donne le nombre de symétries orthogonales dont l'isométrie est la composée dans le Théorème 20.22 du cours 20 [2]. Les points invariants d'un déplacement forment le plan, un point ou l'ensemble vide ; ceux d'un antidéplacement, une droite ou l'ensemble vide. Une translation de vecteur non nul et une symétrie glissante n'ont aucun point invariant : leur nature les distingue.

- **Théorème 21.5 (déplacements, antidéplacements et symétries) :** une isométrie est un déplacement si et seulement si elle est la composée de deux symétries orthogonales ; c'est un antidéplacement si et seulement si elle est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries orthogonales ; c'est un antidéplacement si et seulement si elle s'écrit $S_\mathcal{D} \circ t_{\overrightarrow{w}}$, avec $\overrightarrow{w}$ éventuellement nul.
- **Exemple 21.1 (nature d'une composée) :** $r(\Omega, \theta) \circ S_\mathcal{D}$ et $S_\mathcal{D} \circ r(\Omega, \theta)$ sont des antidéplacements ; ce ne sont donc ni des rotations ni des translations, mais des symétries orthogonales ou des symétries glissantes.

3 Deux points et leurs images

- **Théorème 21.6 (unicité) :** soient A et B deux points distincts. Deux déplacements qui ont les mêmes images en A et en B sont égaux ; de même pour deux antidéplacements. Pour deux isométries quelconques, deux points ne suffisent pas : Id et $S_{(AB)}$ fixent toutes deux A et B.
- **Théorème 21.7 (existence) :** soient A, B, C, D quatre points tels que $AB = CD \neq 0$. Il existe un déplacement f et un seul tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$, et un antidéplacement g et un seul tel que $g(A) = C$ et $g(B) = D$. La condition $AB = CD$ est nécessaire : une isométrie qui envoie A sur C et B sur D vérifie $CD = AB$.

4 Angle d'un déplacement

- **Théorème 21.8 et Définition 21.2 (angle d'un déplacement) :** soit f un déplacement. Il existe un nombre complexe k de module 1 tel que $b' - a' = k(b - a)$ pour tous points $A \neq B$, et un réel θ qui est, pour tous points $A \neq B$, une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$; les réels qui conviennent sont les réels égaux à θ modulo 2π, et $k = e^{i\theta}$. Un tel θ est une mesure de l'*angle du déplacement* f, défini à 2π près ; on dit que f est un déplacement d'angle θ.
- **Théorème 21.9 (translations et rotations) :** soit f un déplacement d'angle θ. Si $\theta = 0\ [2\pi]$, f est une translation ; si $\theta \neq 0\ [2\pi]$, f est une rotation d'angle θ, dont le centre est l'unique point invariant de f. Réciproquement, une translation est un déplacement d'angle 0, et $r(\Omega, \theta)$ un déplacement d'angle θ.
- **Théorème 21.10 (angle d'une composée, d'une réciproque) :** si f et g sont des déplacements d'angles θ et θ', $g \circ f$ est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$, et f^{-1} un déplacement d'angle $-\theta$.

5 Composées de déplacements

- **Composée de deux translations :** $t_{\overrightarrow{w'}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}}$ (Théorème 20.5 (i) du cours 20 [2]).
- **Théorème 21.11 (composée de deux rotations) :** soient Ω et Ω' d'affixes ω et ω', θ et θ' deux réels, et $f = r(\Omega', \theta') \circ r(\Omega, \theta)$.
  - (i) f est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$: si $\theta + \theta' \neq 0\ [2\pi]$, c'est une rotation d'angle $\theta + \theta'$; sinon, c'est une translation.
  - (ii) Si $\theta + \theta' = 0\ [2\pi]$, $\left(1 - e^{i\theta'}\right)(\omega' - \omega)$ est l'affixe du vecteur de la translation f.

(iii) Si $\Omega \neq \Omega'$ et $\theta + \theta' \neq 0\ [2\pi]$, soient $\Delta = (\Omega\Omega')$, de vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}$, $\mathcal{D}_1$ la droite passant par Ω de vecteur directeur $\overrightarrow{w_1}$, où $\frac{\theta}{2}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{\delta}\right)$, et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par Ω' de vecteur directeur $\overrightarrow{w_2}$, où $\frac{\theta'}{2}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{\delta}, \overrightarrow{w_2}\right)$. Alors $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point I, et $f = r\left(I, \theta + \theta'\right)$.

- **Théorème 21.12 (translation et rotation) :** soient $\overrightarrow{w}$ d'affixe c, Ω d'affixe ω et $\theta \neq 0\ [2\pi]$. Alors $t_{\overrightarrow{w}} \circ r\left(\Omega, \theta\right)$ et $r\left(\Omega, \theta\right) \circ t_{\overrightarrow{w}}$ sont des rotations d'angle θ, de centres respectifs les points d'affixes $\omega + \frac{c}{1-e^{i\theta}}$ et $\omega + \frac{e^{i\theta}c}{1-e^{i\theta}}$.

6 Écritures complexes

- **Théorème 21.13 (écriture complexe d'un déplacement) :** une application du plan f est un déplacement si et seulement si elle a une écriture complexe $z' = az + b$, avec $|a| = 1$ (Définition 12.7 du cours 12 [1]). Dans ce cas, les mesures de l'angle de f sont les arguments de a ; si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b ; si $a \neq 1$, f est la rotation de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle de mesure un argument de a.
- **Théorème 21.14 (écriture complexe d'un antidéplacement) :** une application du plan f est un antidéplacement si et seulement si elle a une écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, avec $|a| = 1$. Dans ce cas, $f \circ f$ est la translation de vecteur d'affixe $a\bar{b} + b$.
- **Méthode (voir l'Exemple 21.4) :** si $AB = CD \neq 0$, le déplacement f et l'antidéplacement g du Théorème 21.7 s'obtiennent en écrivant $f : z' = \alpha z + \beta$ et $g : z' = \alpha'\bar{z} + \beta'$, puis en traduisant $f\left(A\right) = C$, $f\left(B\right) = D$, $g\left(A\right) = C$ et $g\left(B\right) = D$ par deux équations à deux inconnues chacune.

7 Antidéplacements et forme réduite

- **Définition 21.3 et Remarque 21.2 (forme réduite) :** soit f une symétrie glissante d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\overrightarrow{w}$ (Définition 20.7 du cours 20 [2]). L'écriture $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$, où $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ est colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$, est la *forme réduite* de f ; $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{w}$, uniques, sont ses *éléments caractéristiques*. Une composée $t_{\overrightarrow{w'}} \circ S_{\mathcal{D}'}$, où $\overrightarrow{w'}$ n'est pas colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}'$, est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante, dont le Théorème 20.19 (iii) et (i) du cours 20 [2] donne l'axe et, dans le second cas, la forme réduite ; seule la forme réduite donne directement l'axe et le vecteur.
- **Théorème 21.15 (propriétés d'une symétrie glissante) :** soit $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$ une symétrie glissante sous forme réduite ; pour tout point M, on note $M' = f\left(M\right)$ et $M'' = f\left(M'\right)$. Le milieu de $[MM']$ appartient à $\mathcal{D}$;

si $M \in \mathcal{D}$, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}$; et $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{w}$. Ainsi $\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM''}$, et $\mathcal{D}$ est la droite passant par le milieu de $[MM']$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.

- **Théorème 21.16 (reconnaître un antidéplacement) :** soit f un antidéplacement. Alors f est une symétrie orthogonale si et seulement si $f \circ f = \mathrm{Id}$, si et seulement si f a au moins un point invariant ; son axe est alors l'ensemble de ses points invariants. Sinon, f est une symétrie glissante, de vecteur $\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM''}$ pour tout point M. Si f a pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, avec $|a| = 1$, f est une symétrie orthogonale si et seulement si $a\bar{b} + b = 0$, et sinon une symétrie glissante de vecteur d'affixe $\frac{1}{2}\left(a\bar{b} + b\right)$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 21. Déplacements et antidéplacements, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.