Fiche de révision : Similitudes

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés renvoient au cours 22 [4], sur les similitudes : *Définition 22.1*, *Théorème 22.1*, etc. désignent ses énoncés numérotés. Un renvoi comme *Théorème 20.4 du cours 20* désigne un énoncé numéroté d'un autre cours : le cours sur les nombres complexes [1], le cours sur les isométries du plan [2] ou le cours sur les déplacements et les antidéplacements [3]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Homothéties

- **Conventions :** le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, dans lequel on prend les affixes (Définition 12.4 du cours 12 [1]). Pour une application du plan f, on note $A' = f(A)$, $M' = f(M)$, etc., et a, a', z, z' leurs affixes. Dans une écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$ (Définition 12.7 du cours 12 [1]), les lettres a et b désignent des coefficients ; les points sont alors notés M, M_1, M_2, d'affixes z, z_1, z_2. Pour $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ sont les arguments de $\frac{d-c}{b-a}$ (Théorème 12.15 du cours 12 [1]) ; $\theta = \theta' \ [2\pi]$ note l'égalité modulo 2π. Les transformations Id, $t_{\overrightarrow{u}}$, S_Ω, $S_\mathcal{D}$, $r(\Omega, \theta)$ sont celles des Définitions 20.1 à 20.5 du cours 20 [2]. Dans $g \circ f$, on applique d'abord f, puis g.
- **Définition 22.1 et Remarque 22.1 (homothétie) :** soient Ω un point et k un réel non nul. L'*homothétie de centre* Ω *et de rapport* k, notée $h(\Omega, k)$, associe à tout point M l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. On a $h(\Omega, k)(\Omega) = \Omega$, $h(\Omega, 1) = \text{Id}$ et $h(\Omega, -1) = S_\Omega$.
- **Théorème 22.1 (écriture complexe) :** soient Ω un point d'affixe ω et k un réel non nul. Le point M' est l'image de M par $h(\Omega, k)$ si et seulement si $z' - \omega = k(z - \omega)$. Réciproquement, si k est un réel différent de 0 et de 1 et b un nombre complexe, l'application d'écriture complexe $z' = kz + b$ est l'homothétie de rapport k et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-k}$, son unique point invariant. Pour $k = 1$, $z' = z + b$ est l'écriture de la translation de vecteur d'affixe b (Théorème 20.4 (i) du cours 20 [2]).
- **Théorème 22.2 (propriétés) :** soit $h = h(\Omega, k)$, avec $k \neq 0$.

(i) Pour tous points M et N, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Réciproquement, si $k \neq 1$, une application du plan f telle que $\overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N est une homothétie de rapport k.

(ii) Pour tous points M et N, $M'N' = |k| MN$.

(iii) h conserve les angles orientés : si $A \neq B$ et $C \neq D$, alors $A' \neq B'$, $C' \neq D'$, et $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ ont les mêmes mesures.

(iv) h est une bijection, de réciproque $h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right)$.

- **Théorème 22.3 (composées) :** soient Ω et Ω' d'affixes ω et ω', k et k' deux réels non nuls, $h = h(\Omega, k)$ et $h' = h(\Omega', k')$.

(i) $h(\Omega, k') \circ h(\Omega, k) = h(\Omega, kk')$.

(ii) Si $kk' \neq 1$, $h' \circ h$ est l'homothétie de rapport kk' et de centre le point J tel que $\overrightarrow{\Omega J} = \frac{1-k'}{1-kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

(iii) Si $kk' = 1$, $h' \circ h$ est la translation de vecteur $(1-k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

(iv) Si $k \neq 1$ et $k' \neq 1$, $h' \circ h = h \circ h'$ si et seulement si $\Omega = \Omega'$.

(v) Si $k \neq 1$ et si $\overrightarrow{w}$ a pour affixe c, $t_{\overrightarrow{w}} \circ h$ et $h \circ t_{\overrightarrow{w}}$ sont des homothéties de rapport k, de centres respectifs les points d'affixes $\omega + \frac{c}{1-k}$ et $\omega + \frac{kc}{1-k}$.

2 Similitudes

- **Définition 22.2 et Remarque 22.2 (similitude, rapport) :** soit k un réel strictement positif. Une *similitude de rapport* k est une application du plan f telle que $M'N' = k\,MN$ pour tous points M et N. Le rapport est unique : $k = \frac{M'N'}{MN}$ pour tous points $M \neq N$. Les similitudes de rapport 1 sont les isométries (Définition 20.6 du cours 20 [2]).

- **Théorème 22.4 (homothéties, composée) :** pour tout point Ω et tout réel $k \neq 0$, $h(\Omega, k)$ est une similitude de rapport $|k|$. Si f et g sont des similitudes de rapports k et k', $g \circ f$ est une similitude de rapport kk'.

- **Théorème 22.5 et Remarque 22.3 (décomposition) :** soient f une similitude de rapport k et Ω un point quelconque. Alors $g = h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right) \circ f$ est une isométrie, et $f = h(\Omega, k) \circ g$; de même, $g' = f \circ h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right)$ est une isométrie, et $f = g' \circ h(\Omega, k)$. Réciproquement, si h est une homothétie de rapport k' et g une isométrie, $h \circ g$ et $g \circ h$ sont des similitudes de rapport $|k'|$. L'isométrie g dépend du point Ω : la décomposition n'est pas unique.

- **Théorème 22.6 (propriétés) :** soit f une similitude de rapport k. Alors f est une bijection, et f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$. Pour

tous points A, B, C, D, $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = k^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Si $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{EF}$, avec x et y réels, alors $\overrightarrow{C'D'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{E'F'}$.

- **Corollaire 22.1 (configurations) :** soit f une similitude de rapport k.
  (i) Si I est le milieu de $[AB]$, I' est le milieu de $[A'B']$.
  (ii) A, B, C sont alignés si et seulement si A', B', C' sont alignés.
  (iii) Si $A \neq B$, l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$, et l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$, de longueur $k\,AB$.
  (iv) Les images de deux droites parallèles (resp. perpendiculaires) sont parallèles (resp. perpendiculaires).
  (v) Si $B \neq A$ et $C \neq A$, $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$: f conserve les angles géométriques.
  (vi) L'image du cercle de centre I et de rayon R est le cercle de centre I' et de rayon kR.
  (vii) Si une droite et un cercle ont un seul point commun, leurs images ont un seul point commun : f conserve le contact.

- **Remarque 22.4 (aires) :** une similitude de rapport k multiplie les aires des triangles par k^2.

- **Théorème 22.7 (trois points) :** soient A, B, C trois points non alignés. Deux similitudes f et g telles que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ et $f(C) = g(C)$ sont égales.

3 Similitudes directes et indirectes

- **Définition 22.3 (similitude directe, indirecte) :** soit f une similitude de rapport k ; si $A \neq B$, alors $A'B' = k\,AB \neq 0$. On dit que f est une *similitude directe* si, pour tous points $A \neq B$ et $C \neq D$, les angles orientés $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ ont les mêmes mesures (f conserve les angles orientés), et une *similitude indirecte* si, pour tous points $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures du premier sont les opposées de celles du second (f change les angles orientés en leurs opposés). Pour $k = 1$, ce sont les déplacements et les antidéplacements (Définition 21.1 du cours 21 [3]).

- **Théorème 22.8 (angles et affixes) :** soient f une similitude, $A \neq B$, $C \neq D$, $q = \frac{d-c}{b-a}$ et $q' = \frac{d'-c'}{b'-a'}$. Alors $|q'| = |q|$; les deux angles ont les mêmes mesures si et seulement si $q' = q$, et des mesures opposées si et seulement si $q' = \bar{q}$. Ainsi f est directe si et seulement si $q' = q$ pour tous $A \neq B$ et $C \neq D$, et indirecte si et seulement si $q' = \bar{q}$ pour tous $A \neq B$ et $C \neq D$.

- **Théorème 22.9 (classification) :** soient f une similitude de rapport k, Ω un point et $g = h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right) \circ f$, l'isométrie du Théorème 22.5. Alors f est

directe si et seulement si g est un déplacement, et indirecte si et seulement si g est un antidéplacement. Toute similitude est directe ou indirecte, et n'est pas les deux. Toute homothétie est une similitude directe.

- **Théorème 22.10 (composée et réciproque) :** soient f et g deux similitudes. Si f et g sont toutes deux directes, ou toutes deux indirectes, $g \circ f$ est directe ; si l'une est directe et l'autre indirecte, $g \circ f$ est indirecte. La réciproque d'une similitude directe est directe, celle d'une similitude indirecte est indirecte.
- **Exemple 22.2 (natures) :** pour Ω un point, $k \neq 0$, θ réel et $\mathcal{D}$ une droite, $r(\Omega, \theta) \circ h(\Omega, k)$ est une similitude directe, et $h(\Omega, k) \circ S_{\mathcal{D}}$ une similitude indirecte. Une isométrie est une similitude directe si et seulement si c'est un déplacement.

4 Écritures complexes

- **Théorème 22.11 (similitude directe) :** soient f une application du plan et $k > 0$. L'application f est une similitude directe de rapport k si et seulement s'il existe deux nombres complexes a et b, avec $|a| = k$, tels que f ait pour écriture complexe $z' = az + b$. En particulier, toute application d'écriture complexe $z' = az + b$, avec $a \neq 0$, est une similitude directe de rapport $|a|$.
- **Théorème 22.12 (similitude indirecte) :** de même, f est une similitude indirecte de rapport k si et seulement s'il existe deux nombres complexes a et b, avec $|a| = k$, tels que f ait pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$. En particulier, toute application d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, avec $a \neq 0$, est une similitude indirecte de rapport $|a|$.
- **Lire une écriture complexe (Exemple 22.3) :** sur une écriture $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$, avec $a \neq 0$, on lit la nature (z : directe ; $\bar{z}$: indirecte) et le rapport $|a|$. Si a est un réel différent de 0 et de 1, $z' = az + b$ est une homothétie (Théorème 22.1). Pour $|a| = 1$, on retrouve les déplacements et les antidéplacements (Théorèmes 21.13 et 21.14 du cours 21 [3]).

5 Deux points et leurs images

- **Théorème 22.13 (deux points et leurs images) :** soient A, B, C, D quatre points d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D, avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

  (i) Il existe une similitude directe f et une seule telle que $f(A) = C$ et $f(B) = D$; son écriture complexe est $z' = az + b$, avec $a = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ et $b = z_C - az_A$.

  (ii) Il existe une similitude indirecte g et une seule telle que $g(A) = C$ et $g(B) = D$; son écriture complexe est $z' = a\bar{z} + b$, avec $a = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ et $b = z_C - a\overline{z_A}$.

Leur rapport est $\frac{CD}{AB}$. Contrairement au cas des déplacements (Théorème 21.7 du cours 21 [3]), aucune condition sur les distances n'est requise.

- **Exemple 22.4 (exactement deux similitudes) :** sous les hypothèses du Théorème 22.13, il y a exactement deux similitudes qui envoient A sur C et B sur D : l'une directe, l'autre indirecte (Théorème 22.13), et elles sont différentes, car aucune similitude n'est à la fois directe et indirecte (Théorème 22.9 (ii)).

6 Similitudes directes

- **Théorème 22.14 et Définition 22.4 (angle) :** soit f une similitude directe de rapport k, d'écriture complexe $z' = az + b$. Pour tous points $M_1 \neq M_2$, $z'_2 - z'_1 = a(z_2 - z_1)$; en particulier, a ne dépend que de f. Il existe un réel θ qui est, pour tous points $M_1 \neq M_2$, une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M'_1M'_2}\right)$; les réels qui conviennent sont les réels égaux à θ modulo 2π, et $a = ke^{i\theta}$. Un tel θ est une mesure de l'*angle de la similitude directe* f, défini à 2π près ; pour $k = 1$, c'est l'angle du déplacement f (Définition 21.2 du cours 21 [3]).
- **Théorème 22.15 (angle d'une composée, d'une réciproque) :** si f et g sont des similitudes directes de rapports k et k' et d'angles θ et θ', $g \circ f$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$, et f^{-1} une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.
- **Théorème 22.16 et Définition 22.5 (centre, forme réduite) :** soit f une similitude directe de rapport k et d'angle θ, d'écriture complexe $z' = az + b$, avec $a = ke^{i\theta}$.

  (i) $a = 1$ si et seulement si $k = 1$ et $\theta = 0\ [2\pi]$; f est alors la translation de vecteur d'affixe b.

  (ii) Si $a \neq 1$, f a un point invariant Ω et un seul, son *centre*, d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, et $z' - \omega = a(z - \omega)$.

  (iii) Si $a \neq 1$, $f = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta) \circ h(\Omega, k)$: c'est la *forme réduite* de f. Le centre, le rapport et l'angle sont ses *éléments caractéristiques* ; on dit que f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

  Si $a = 1$, f est une translation : le centre et la forme réduite ne sont définis que pour $a \neq 1$.
- **Théorème 22.17 (centre, rapport et angle donnés) :** soient Ω un point d'affixe ω, $k > 0$ et θ un réel, avec $k \neq 1$ ou $\theta \neq 0\ [2\pi]$. Alors $h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \theta)$ est la seule similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, d'écriture complexe $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ (Théorèmes 22.14 (ii) et 22.16 (ii)). Une application du plan f est cette similitude si et

seulement si $f(\Omega) = \Omega$ et, pour tout point $M \neq \Omega$, $\Omega M' = k\,\Omega M$ et θ est une mesure de $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$.

7 Similitudes indirectes

- **Théorème 22.18 (centre) :** soit f une similitude indirecte de rapport k, d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, avec $|a| = k$.

  (i) $f \circ f$ a pour écriture complexe $z'' = k^2 z + a\bar{b} + b$.

  (ii) Si $k \neq 1$, f a un point invariant Ω et un seul, son *centre*, d'affixe $\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-k^2}$, et $f \circ f = h\left(\Omega, k^2\right)$.

  (iii) Si $k = 1$, f est un antidéplacement : une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante (Théorème 21.16 du cours 21 [3]). Le centre, l'axe et la forme réduite ne sont définis que pour $k \neq 1$.

- **Théorème 22.19 et Définition 22.6 (forme réduite, axe) :** soit f une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$, de centre Ω d'affixe ω, d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$. Soient α un réel tel que $a = ke^{2i\alpha}$ (il en existe), et $\mathcal{D}$ la droite passant par Ω de vecteur directeur d'affixe $e^{i\alpha}$.

  (i) $f = h(\Omega, k) \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ h(\Omega, k)$: c'est la *forme réduite* de f, et $\mathcal{D}$ est son *axe*.

  (ii) $\mathcal{D}$ est la seule droite Δ telle que $f = h(\Omega, k) \circ S_{\Delta}$; c'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

  (iii) $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, et $f\left(\mathcal{D}^{\perp}\right) = \mathcal{D}^{\perp}$, où $\mathcal{D}^{\perp}$ est la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en Ω.

  Le centre, le rapport et l'axe sont les *éléments caractéristiques* de f ; ils la déterminent : pour $k > 0$, $k \neq 1$ et Δ passant par Ω, $h(\Omega, k) \circ S_{\Delta}$ est la seule similitude indirecte de centre Ω, de rapport k et d'axe Δ (Théorème 22.20).

- **Remarque 22.5 (rapport positif) :** avec le rapport $-k$ au lieu de k, l'axe serait remplacé par $\mathcal{D}^{\perp}$: $f = h(\Omega, -k) \circ S_{\mathcal{D}^{\perp}}$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 21. Déplacements et antidéplacements, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 22. Similitudes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.