Problèmes type du Bac & Solutions :*
Les suites numériques

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 1.1 du cours 1* désigne un énoncé numéroté du cours 1 [1] ; de même, *Remarque 3.1 du cours 3* désigne un énoncé numéroté du cours 3 [3]. Les renvois *cours 2*, *cours 3* et *cours 4* désignent les cours sur la limite d'une fonction, sur la continuité et sur la fonction dérivée [2, 3, 4]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 Type Annales du Bac : Nouvelle-Calédonie, mars 2011. *Examinons la suite* (u_n) *où* $u_0 = 4$ *et pour tout* n *entier naturel,* $u_{n+1} = \sqrt{4u_n - 4}$. *Considérons également la fonction* f *sur* $[1, +\infty[$ *définie par* $f(x) = \sqrt{4x - 4}$.

1. *Trouver les solutions de* $f(x) = x$ *dans* $[1, +\infty[$.
2. *Analyser les variations de* f *sur* $]1, +\infty[$ *et conclure sur l'image par* f *de cet intervalle.*
3. *Prouver que chaque terme* u_n *appartient à* $]2, +\infty[$ *en utilisant le principe de récurrence.*
4. *Démontrer par récurrence que la suite* (u_n) *est décroissante.*
5. *Établir la convergence de la suite* (u_n) *et calculer sa limite.*

Solution 1

1. *Soit* $x \geq 1$. *Comme les deux membres de* $\sqrt{4x - 4} = x$ *sont positifs, l'équation équivaut à l'égalité de leurs carrés :*

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 4x - 4 = x^2 \\ &\iff x^2 - 4x + 4 = 0 \\ &\iff (x - 2)^2 = 0. \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = x$ *admet une unique solution :* $x = 2$, *qui appartient bien à* $[1, +\infty[$ *(et* $f(2) = \sqrt{4} = 2$*).*

*Les problèmes de type Annales du Bac s'inspirent de ces annales tout en étant originaux grâce à des modifications créatives.

2. *La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par la formule suivante (cours 4 [4]) :*

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{4x-4}} = \frac{2}{\sqrt{4x-4}}.$$

Comme $f'(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle (cours 4 [4]).

Puisque f est continue (car dérivable, cours 4 [4]) et strictement croissante sur $]1,+\infty[$, avec $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0$ (continuité de f en 1, cours 3 [3]) et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (cours 2 [2]), on en déduit que l'image de l'intervalle $]1,+\infty[$ par f est l'intervalle $]0,+\infty[$ (Remarque 3.1 du cours 3).

3. *Démontrons par récurrence la proposition $P(n)$: $u_n > 2$.*

Initialisation *: $u_0 = 4 > 2$, donc $P(0)$ est vraie.*

Hérédité *: Supposons que $u_n > 2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{4u_n - 4} \\ &> \sqrt{4\times 2 - 4} = 2, \end{aligned}$$

car $4u_n - 4 > 4\times 2 - 4$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion *: Par récurrence (Théorème 1.13 du cours 1 [1]), $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.*

4. *Démontrons par récurrence la proposition $P(n)$: $u_{n+1} \leq u_n$.*

Initialisation *: $u_1 = \sqrt{4u_0 - 4} = \sqrt{12} < u_0 = 4$, donc $P(0)$ est vraie.*

Hérédité *: Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Comme u_n et u_{n+1} appartiennent à $]2,+\infty[$ (question 3), et que la fonction f est croissante sur $]1,+\infty[$ (question 2), on a :*

$$\begin{aligned} f(u_{n+1}) &\leq f(u_n) \\ u_{n+2} &\leq u_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion *: Par récurrence (Théorème 1.13 du cours 1 [1]), $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.*

5. *La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle est convergente (Théorème 1.12 du cours 1 [1]). Soit L sa limite. Comme $u_n > 2$ pour tout n, on a $L \geq 2$ (Théorème 1.9 du cours 1 [1], appliqué avec la suite constante égale à 2) ; donc L appartient à $[1,+\infty[$, intervalle qui contient tous les u_n et sur lequel f est continue (cours 3 [3]). On peut donc passer à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (Théorème 1.10 du cours 1 [1]) : $f(L) = L$. Par la question 1, $L = 2$. La limite de la suite (u_n) est donc $L = 2$.*

Problème 2 Type Annales du Bac : Amérique du Sud 2011. *Soit la suite* (v_n) *définie par récurrence par* $v_0 = 6$ *et, pour tout entier naturel* n,

$$v_{n+1} = g(v_n),$$

où

$$g(x) = 5 - \frac{2}{x+2}.$$

1. *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel* n, *on a* $v_n > 4$.
2. *Montrer que la fonction* g *est croissante sur l'intervalle* $[4, +\infty[$.
3. *Démontrer par récurrence que la suite* (v_n) *est décroissante.*
4. *Conclure que la suite* (v_n) *est convergente et calculer sa limite.*

Solution 2

1. *Preuve par récurrence de* $v_n > 4$ *:*

   Initialisation : *Pour* $n = 0$, *on a* $v_0 = 6 > 4$. *L'initialisation est donc vérifiée.*

   Hérédité : *Supposons que* $v_n > 4$ *pour un certain* $n \in \mathbb{N}$ *(hypothèse de récurrence). Alors :*

$$\begin{aligned} v_n + 2 &> 6 \\ \frac{2}{v_n+2} &< \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ 5 - \frac{2}{v_n+2} &> 5 - \frac{1}{3} > 4. \end{aligned}$$

   Donc $v_{n+1} = g(v_n) > 4$. *L'hérédité est donc vérifiée.*

   Conclusion : *Par le principe de récurrence (Théorème 1.13 du cours 1 [1]), on en déduit que* $v_n > 4$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. *La fonction* g *est dérivable sur* $[4, +\infty[$ *et sa dérivée est (cours 4 [4]) :*

$$g'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$$

   pour tout $x \geq 4$. *Donc* g *est croissante sur* $[4, +\infty[$ *(cours 4 [4]).*

3. *Preuve par récurrence de* $v_{n+1} \leq v_n$ *:*

   Initialisation : *Pour* $n = 0$, *on a* $v_1 = g(v_0) = 5 - \frac{2}{6+2} = 5 - \frac{1}{4} \leq 6 = v_0$. *L'initialisation est donc vérifiée.*

   Hérédité : *Supposons que* $v_{n+1} \leq v_n$ *pour un certain* $n \in \mathbb{N}$ *(hypothèse de récurrence). Comme* v_n *et* v_{n+1} *appartiennent à* $[4, +\infty[$ *(question 1), et que* g *est croissante sur cet intervalle (question 2), on a :*

$$\begin{aligned} g(v_{n+1}) &\leq g(v_n) \\ v_{n+2} &\leq v_{n+1}. \end{aligned}$$

L'hérédité est donc vérifiée.

Conclusion : *Par le principe de récurrence (Théorème 1.13 du cours 1 [1]), on en déduit que $v_{n+1} \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

4. *La suite (v_n) est décroissante et minorée par 4, donc elle est convergente (Théorème 1.12 du cours 1 [1]). Soit l sa limite. Comme $v_n > 4$ pour tout n, on a $l \geq 4$ (Théorème 1.9 du cours 1 [1], appliqué avec la suite constante égale à 4). La fonction g est dérivable, donc continue, sur $[4, +\infty[$ (question 2, cours 4 [4]), et cet intervalle contient tous les v_n et l ; donc (Théorème 1.10 du cours 1 [1]) :*

$$l = \lim_{n \to +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} g(v_n) = g(l).$$

Comme $l + 2 \neq 0$, on résout l'équation

$$\begin{aligned} l &= 5 - \frac{2}{l+2} \\ l(l+2) &= 5(l+2) - 2 \\ l^2 + 2l &= 5l + 10 - 2 \\ l^2 - 3l - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $\Delta = 41$. Donc les solutions de cette équation sont

$$l_1 = \frac{3 + \sqrt{41}}{2}, \quad l_2 = \frac{3 - \sqrt{41}}{2}.$$

Comme $\sqrt{41} > 3$, on a $l_2 < 0$; or $l \geq 4$, donc la seule solution possible est l_1, qui vérifie bien $l_1 \geq 4$ car $\sqrt{41} > 5$. Donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = l_1 = \frac{3+\sqrt{41}}{2}$.

Problème 3 *Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 + 3n + 1$.*

1. *Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.*
2. *Calculer u_{10}.*
3. *Déterminer si la suite (u_n) est bornée.*

Solution 3

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - (2n^2 + 3n + 1) \\ &= 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 1 - 2n^2 - 3n - 1 \\ &= 4n + 5 > 0, \end{aligned}$$

donc (u_n) est strictement croissante (Définition 1.2 du cours 1 [1]).

2. $u_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 200 + 30 + 1 = 231.$

3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 + 3n + 1 \geq n$, *et* $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. *Par le théorème de comparaison (Théorème 1.8 du cours 1 [1]),* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. *Une suite qui tend vers* $+\infty$ *n'est pas majorée (Remarque 1.2 du cours 1 [1]) ; donc la suite* (u_n) *n'est pas bornée.*

Problème 4 *La suite* (y_n) *est une suite géométrique de raison* q *et de premier terme* $y_0 = 1$. *On sait que* $y_3 = 8$.

1. *Trouver la raison* q *de la suite* (y_n).
2. *Exprimer* y_n *en fonction de* n.
3. *Calculer la somme des* 100 *premiers termes de la suite* (y_n), *c'est-à-dire* $S_{99} = y_0 + y_1 + \ldots + y_{99}$.

Solution 4

1. *Puisque* (y_n) *est une suite géométrique avec* $y_0 = 1$, *on a* $y_3 = y_0 \cdot q^3$ *(Théorème 1.4 du cours 1 [1]). Sachant que* $y_3 = 8$, *on obtient :*

$$1 \cdot q^3 = 8$$
$$q^3 = 8$$
$$q = \sqrt[3]{8}$$
$$q = 2.$$

2. *La suite* (y_n) *étant géométrique de premier terme* $y_0 = 1$ *et de raison* $q = 2$, *on a (Théorème 1.4 du cours 1 [1]) :*

$$y_n = y_0 \cdot q^n$$
$$y_n = 1 \cdot 2^n$$
$$y_n = 2^n.$$

3. *Rappelons la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison* $q \neq 1$ *(Théorème 1.5 du cours 1 [1]) :*

$$\begin{aligned} S_n &= y_0 + y_1 + \ldots + y_n \\ &= (\textit{premier terme}) \frac{1 - q^{\textit{nombre de termes}}}{1 - q} \\ &= y_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

D'où

$$S_{99} = \frac{y_0(1 - q^{100})}{1 - q} = \frac{2^{100} - 1}{2 - 1} = 2^{100} - 1.$$

Problème 5 *On considère la suite* (v_n) *définie par récurrence par* $v_0 = 5$ *et* $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2$ *pour tout* n.

1. *Calculer v_1 et v_2.*

2. *Démontrer que la suite (v_n) est décroissante et minorée. En déduire que la suite (v_n) est convergente.*

3. *Trouver la limite de la suite (v_n).*

Solution 5 1. *On a $v_0 = 5$. Calculons v_1 et v_2 :*

$$v_1 = \frac{1}{2}v_0 + 2 = \frac{1}{2} \times 5 + 2 = \frac{9}{2},$$

$$v_2 = \frac{1}{2}v_1 + 2 = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} + 2 = \frac{17}{4}.$$

2. *Pour montrer que la suite (v_n) est convergente, nous allons démontrer qu'elle est décroissante et minorée.*

   Montrons par récurrence que la suite est décroissante, c'est-à-dire que pour tout n, $v_{n+1} < v_n$. Pour $n = 0$, nous avons déjà calculé que $v_1 = \frac{9}{2} < 5 = v_0$, donc la propriété est vraie au rang initial. Supposons que pour un certain $n \geq 0$, on ait $v_{n+1} < v_n$. Alors :

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + 2 < \frac{1}{2}v_n + 2 = v_{n+1}.$$

   L'inégalité stricte vient de l'hypothèse de récurrence. Donc, par récurrence (Théorème 1.13 du cours 1 [1]), la suite est décroissante.

   Montrons aussi par récurrence que $v_n > 0$ pour tout n. Pour $n = 0$, $v_0 = 5 > 0$. Si $v_n > 0$ pour un certain $n \geq 0$, alors $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2 > 2 > 0$. Donc, par récurrence (Théorème 1.13 du cours 1 [1]), $v_n > 0$ pour tout n : la suite est minorée par 0.

   Une suite décroissante et minorée est convergente (Théorème 1.12 du cours 1 [1]).

3. *Pour trouver la limite l de la suite (v_n), nous passons à la limite dans l'équation de récurrence $v_{n+1} = f(v_n)$, avec $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, fonction affine continue sur $\mathbb{R}$ (cours 3 [3]) ; par le Théorème 1.10 du cours 1 [1] :*

$$l = \frac{1}{2}l + 2.$$

   En résolvant cette équation, on obtient :

$$l - \frac{1}{2}l = 2$$

$$\frac{1}{2}l = 2$$

$$l = 4.$$

   Donc la limite de la suite (v_n) est 4.

Problème 6 *La suite (w_n) est définie pour tout entier naturel n par $w_n = 3^n - n$.*

1. *Montrer que la suite (w_n) est strictement croissante.*
2. *Calculer w_3.*
3. *Déterminer la limite de la suite (w_n).*

Solution 6 1. *Pour montrer que la suite (w_n) est strictement croissante, considérons la différence entre deux termes consécutifs :*

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 3^{n+1} - (n+1) - (3^n - n) \\ &= 3^{n+1} - 3^n - 1 \\ &= 3^n(3-1) - 1 \\ &= 2 \times 3^n - 1. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 0$, on a $3^n \geq 1$, donc $2 \times 3^n \geq 2 > 1$ et $w_{n+1} - w_n > 0$. Ainsi, la suite (w_n) est strictement croissante (Définition 1.2 du cours 1 [1]).

2. *Pour calculer w_3, remplaçons n par 3 dans l'expression de w_n :*

$$w_3 = 3^3 - 3 = 27 - 3 = 24.$$

3. *La limite de $3^n - n$ est de la forme indéterminée $+\infty + (-\infty)$; on compare donc w_n à une suite plus simple. Montrons par récurrence (Théorème 1.13 du cours 1 [1]) que $3^n \geq 1 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, $3^0 = 1 \geq 1$. Si $3^n \geq 1 + 2n$ pour un certain $n \geq 0$, alors $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3 + 6n \geq 3 + 2n = 1 + 2(n+1)$.*

   On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = 3^n - n \geq 1 + 2n - n = n + 1.$$

   Comme $\lim_{n \to +\infty}(n+1) = +\infty$, le théorème de comparaison (Théorème 1.8 du cours 1 [1]) donne

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty.$$

Problème 7 *On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 5$.*

1. *Exprimer u_n en fonction de n.*
2. *Calculer u_{10}.*
3. *Déterminer la somme des onze premiers termes de la suite (u_n).*
4. *Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n en fonction de n.*

5. *On souhaite trouver le plus petit entier n tel que $S_n > 1000$. Déterminer la valeur de cet entier.*

Solution 7 1. *Le terme général d'une suite arithmétique est $u_n = u_0 + nr$ (Théorème 1.1 du cours 1 [1]). Ici, $u_0 = 3$ et $r = 5$, donc :*

$$u_n = 3 + 5n.$$

2. *Pour calculer u_{10}, on remplace n par 10 dans l'expression de u_n :*

$$u_{10} = 3 + 5 \times 10 = 3 + 50 = 53.$$

3. *La somme des onze premiers termes de la suite (u_n), notée S_{11}, se calcule par la formule (Théorème 1.3 du cours 1 [1]) :*

$$S_{11} = \frac{11}{2}(u_0 + u_{10}).$$

En utilisant les valeurs de u_0 et u_{10}, on obtient :

$$S_{11} = \frac{11}{2}(3 + 53) = \frac{11}{2} \times 56 = 11 \times 28 = 308.$$

4. *Rappelons la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique (Théorème 1.3 du cours 1 [1]) ; pour $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \\ &= (\text{nb termes}) \, \frac{\textit{premier terme + dernier terme}}{2} \\ &= n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \\ &= \frac{n}{2}(u_0 + u_0 + (n-1)r) \quad \textit{(Théorème 1.1)} \\ &= \frac{n}{2}(2u_0 + (n-1)r). \end{aligned}$$

En remplaçant u_0 et r par leurs valeurs, on obtient :

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \times 3 + (n-1) \times 5)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(6 + 5n - 5)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(5n + 1).$$

5. *Pour trouver le plus petit entier n tel que $S_n > 1000$, on résout l'inégalité :*

$$\frac{n}{2}(5n + 1) > 1000$$

$$5n^2 + n > 2000$$

$$5n^2 + n - 2000 > 0.$$

Pour résoudre l'inégalité $5n^2+n-2000 > 0$*, nous allons utiliser la méthode du discriminant. Nous allons d'abord trouver les racines de l'équation du second degré associée* $5n^2+n-2000 = 0$*. Pour notre équation, nous avons le discriminant :*

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 5 \times (-2000) = 1 + 40000 = 40001.$$

Le discriminant est positif, donc l'équation a deux racines réelles distinctes :

$$n_1 = \frac{-1 - \sqrt{40001}}{10}$$

$$n_2 = \frac{-1 + \sqrt{40001}}{10}.$$

Comme $\sqrt{40001}$ *est un peu supérieur à 200,* n_1 *sera négatif et* n_2 *sera positif. Maintenant, pour résoudre l'inégalité* $5n^2 + n - 2000 > 0$*, nous considérons le signe du polynôme. Comme son coefficient dominant* 5 *est positif, le polynôme est strictement positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Ainsi, l'inégalité* $5n^2+n-2000 > 0$ *est satisfaite pour :*

$$n < n_1 \quad ou \quad n > n_2.$$

Comme nous cherchons des valeurs positives de n*, nous retenons la condition :*

$$n > n_2 = \frac{-1 + \sqrt{40001}}{10} \simeq 19{,}9.$$

Puisque n *doit être un entier, le plus petit entier satisfaisant l'inégalité est* $n = 20$*. On le vérifie directement :* $S_{19} = \frac{19}{2} \times 96 = 912 \leq 1000$ *et* $S_{20} = \frac{20}{2} \times 101 = 1010 > 1000$*.*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.