# Problèmes type Bac & Solutions : Limite d'une fonction

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 2.1 du cours 2* désigne un énoncé numéroté du cours 2 [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ce cours est disponible sur la page mohamedkadhem.com/baccalaureat.

**Problème 1** *Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.*

1. *Déterminer la limite de $f$ à droite et à gauche de 1. La limite de $f$ en 1 existe-t-elle ? La courbe de $f$ a-t-elle une asymptote verticale ?*
2. *Étudier la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe de $f$ a-t-elle une asymptote horizontale ?*
3. *Calculer la limite de $f$ en 0.*

**Solution 1**

1. *Quand $x$ tend vers 1, le numérateur tend vers $-1$ et le dénominateur vers 0 : ce n'est pas une forme indéterminée, et on étudie le signe de $x-1$. Pour $x > 1$, $x-1$ tend vers $0^+$ ; pour $x < 1$, vers $0^-$. Par la règle des signes (Théorème 2.3 du cours 2 [1]),*

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

*Comme ces limites sont différentes, la limite de $f$ en 1 n'existe pas (Théorème 2.6 du cours 2 [1]).*

*La courbe de $f$ a une asymptote verticale d'équation $x = 1$ (Définition 2.5 du cours 2 [1]).*

2. *Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, on factorise par le terme de plus haut degré ; comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 en $\pm\infty$ (Théorème 2.1 du cours 2), on a, par les Théorèmes*

*2.2 et 2.3 du cours 2 [1],*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{1-\frac{1}{x}} = 2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{1-\frac{1}{x}} = 2.$$

*Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont les mêmes et donnent l'ordonnée de l'asymptote horizontale : la courbe de $f$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ (Définition 2.4 du cours 2 [1]).*

3. *La fonction $f$ est une fonction rationnelle, continue en $0$, donc (Théorème 2.1 du cours 2 [1])*

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = \frac{-3}{-1} = 3.$$

**Problème 2** *Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.*

1. *Simplifier l'expression de $g$ et déterminer la limite en $2$.*
2. *Étudier la limite de $g$ en $+\infty$.*
3. *Calculer la limite de $g$ en $0$.*

**Solution 2**

1. *On peut simplifier $g(x)$ en factorisant le numérateur :*

$$g(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}.$$

*En simplifiant, on obtient $g(x) = x+2$ pour tout $x \neq 2$. La limite en $2$ est donc (Théorème 2.1 du cours 2 [1]) :*

$$\lim_{x\to2} g(x) = \lim_{x\to2}(x+2) = 2+2 = 4.$$

2. *Par le Théorème 2.2 du cours 2 [1] (somme d'une limite $+\infty$ et d'une constante),*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty.$$

3. *La fonction $g$ est une fonction rationnelle, continue en $0$, donc (Théorème 2.1 du cours 2 [1]) la limite de $g$ en $0$ est :*

$$\lim_{x\to0} g(x) = g(0) = \frac{-4}{-2} = 2.$$

**Problème 3** *Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $h(x) = \frac{3x}{x^2}$.*

1. *Déterminer la limite de $h$ à droite et à gauche de 0. La limite de $h$ en 0 existe-t-elle ? La courbe de $h$ a-t-elle une asymptote verticale ?*
2. *Étudier la limite de $h$ en $+\infty$ et en $-\infty$.*
3. *Calculer la limite de $h$ en 1.*

**Solution 3** *1. La limite de $h$ en 0 est de la forme $\frac{0}{0}$, qui est indéterminée. Cependant, en simplifiant par $x \neq 0$, on obtient $h(x) = \frac{3}{x}$ ; le numérateur vaut $3 > 0$, donc, par la règle des signes (Théorème 2.3 du cours 2 [1]),*

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x} = -\infty.$$

*Comme ces limites sont différentes, la limite de $h$ en 0 n'existe pas (Théorème 2.6 du cours 2 [1]).*

*La courbe de $h$ a une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (Définition 2.5 du cours 2 [1]).*

*2. Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont (Théorèmes 2.1 et 2.2 du cours 2 [1]) :*

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

*La courbe de $h$ admet donc en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (Définition 2.4 du cours 2 [1]).*

*3. La fonction $h$ est une fonction rationnelle, continue en 1, donc (Théorème 2.1 du cours 2 [1]) la limite de $h$ en 1 est :*

$$\lim_{x \to 1} h(x) = h(1) = \frac{3}{1} = 3.$$

**Problème 4** *Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ par $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x}$.*

1. *Calculer les limites de $g$ en $x = 0$ et $x = 1$.*
2. *Déterminer les asymptotes verticales de la courbe de $g$.*
3. *Étudier la limite de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.*

**Solution 4** *1. On simplifie : pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$,*

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)x} = \frac{x+1}{x}.$$

*En 0, le numérateur $x+1$ tend vers $1 > 0$ et le dénominateur $x$ tend vers $0^+$ à droite, $0^-$ à gauche ; par la règle des signes (Théorème 2.3 du cours 2 [1]),*

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty.$$

*Comme ces limites sont différentes, la limite de $g$ en 0 n'existe pas (Théorème 2.6 du cours 2 [1]). En 1, la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est continue, donc (Théorème 2.1 du cours 2 [1])*

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{1+1}{1} = 2.$$

*2. Comme $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$, la courbe de $g$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (Définition 2.5 du cours 2 [1]). En 1, la limite de $g$ est finie (elle vaut 2), ainsi que les limites à droite et à gauche, qui valent aussi 2 (Théorème 2.6 du cours 2 [1]) : la droite d'équation $x = 1$ n'est pas une asymptote verticale. En tout autre réel $a$, $g$ est une fonction rationnelle continue, donc sa limite $g(a)$ est finie (Théorème 2.1 du cours 2 [1]) : il n'y a pas d'autre asymptote verticale.*

*3. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, on a*

$$g(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

*Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ (Théorème 2.1 du cours 2), les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont (Théorème 2.2 du cours 2 [1]) :*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

*La courbe de $g$ admet donc en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ (Définition 2.4 du cours 2 [1]).*

**Problème 5** *Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2}$.*

1. *Déterminer la limite de $f$ en 2. La courbe de $f$ a-t-elle une asymptote verticale ?*

2. *Étudier la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe de $f$ a-t-elle une asymptote horizontale ?*

3. *Calculer la limite de $f$ en 1.*

**Solution 5** 1. *Quand $x$ tend vers 2, le numérateur tend vers $3 > 0$, et le dénominateur $(x-2)^2$ tend vers zéro en restant strictement positif. Par la règle des signes (Théorème 2.3 du cours 2 [1]), la limite en 2 est :*

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty.$$

*La courbe de $f$ a donc une asymptote verticale d'équation $x = 2$ (Définition 2.5 du cours 2 [1]).*

2. *Pour $x \neq 0$ et $x \neq 2$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4} \\ &= \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2})} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{x(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2})}. \end{aligned}$$

*Le numérateur tend vers 1 ; le facteur $1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$ tend vers 1, donc le dénominateur tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ (Théorèmes 2.1 et 2.2 du cours 2 [1]). Par le Théorème 2.3 du cours 2 [1], les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2})} = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2})} = 0.$$

*La courbe de $f$ admet donc en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (Définition 2.4 du cours 2 [1]).*

3. *La fonction $f$ est une fonction rationnelle, continue en 1, donc (Théorème 2.1 du cours 2 [1]) la limite de $f$ en 1 est :*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \frac{2}{1} = 2.$$

# Références


[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.