Problèmes type Bac & Solutions : Fonction continue, Continuité

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 3.1 du cours 3* désigne un énoncé numéroté du cours 3 [2], et le renvoi *cours 2* désigne le cours sur la limite d'une fonction [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$.*

1. *Déterminer la limite de f en $x=2$.*
2. *Montrer que f n'est pas continue en $x=2$.*
3. *Prolonger f par continuité en $x=2$.*

Solution 1

1. *On peut factoriser le numérateur pour simplifier la fonction :*

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2 \quad pour \quad x\neq 2.$$

Par ailleurs, f, fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule qu'en 2, est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (Théorème 3.1 (ii) et Définition 3.2 du cours 3 [2]). Comme f coïncide avec $x\mapsto x+2$ pour $x\neq 2$, et que cette fonction est continue en 2 (Théorème 3.1 (i) du cours 3 [2]), la limite de f en $x=2$ est $2+2=4$ (cours 2 [1]).

2. *La fonction f n'est pas continue en $x=2$ car elle n'est pas définie en ce point.*
3. *Le prolongement par continuité de f en $x=2$ consiste à définir $f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=4$ (Définition 3.3 du cours 3 [2]).*

Problème 2 *Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ x<0\\ x^2 & si\ x\geq 0\end{cases}$.*

1. *La fonction g est-elle continue en $x=0$?*
2. *Déterminer si g est continue sur $\mathbb{R}$.*

3. *Calculer la limite de g en $x = -1$.*

Solution 2 1. *On a $g(0) = 0^2 = 0$. D'autre part, la limite de la fonction à gauche de $x = 0$ est :*

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = 2(0) + 1 = 1,$$

car g coïncide sur $]-\infty, 0[$ avec le polynôme $2x+1$ (cours 2) ; cette limite est différente de $g(0)$; donc $g(x)$ ne tend pas vers $g(0)$ quand x tend vers 0 (cours 2 [1]). La fonction g n'est donc pas continue en $x = 0$ (Définition 3.1 du cours 3 [2]).

2. *La fonction g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas continue en $x = 0$ (Définition 3.2 du cours 3 [2]).*

3. *Sur $]-\infty, 0[$, g coïncide avec le polynôme $2x + 1$, qui est continu en -1 (Théorème 3.1 du cours 3 [2]) ; donc g est continue en -1 (cours 2 [1]) et $\lim_{x \to -1} g(x) = g(-1) = 2(-1) + 1 = -1$.*

Problème 3 *Soit la fonction h définie sur $[1, 2[\cup]2, 3]$ par $h(x) = \frac{1}{x-2}$.*

1. *Calculer les limites de h à droite et à gauche de $x = 2$.*

2. *Étudier la continuité de h sur $[1, 2[$ et sur $]2, 3]$.*

3. *Déterminer les asymptotes verticales de la fonction h.*

Solution 3 1. *Le numérateur vaut 1 et $x - 2$ tend vers 0, avec $x - 2 > 0$ pour $x > 2$ et $x - 2 < 0$ pour $x < 2$ (cours 2 [1]). Les limites de h à droite et à gauche de $x = 2$ sont donc :*

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 2^-} h(x) = -\infty.$$

2. *Sur $[1, 2[$ et sur $]2, 3]$, h est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas : elle est donc continue sur chacun de ces deux intervalles (Théorème 3.1 (ii) du cours 3 [2]). Elle n'est pas définie en $x = 2$, et n'y est pas prolongeable par continuité (avec $I = [1, 3]$ dans la Remarque 3.2 du cours 3 [2]), car ses limites à droite et à gauche sont infinies (question 1) : elle n'a donc pas de limite finie en ce point (cours 2 [1]).*

3. *D'après la question 1, h tend vers $+\infty$ à droite et vers $-\infty$ à gauche de 2, donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe de h (cours 2 [1]). En tout autre point de $[1, 2[\cup]2, 3]$, h est continue (question 2), donc elle y admet une limite finie (à droite en 1, à gauche en 3) : c'est la seule asymptote verticale.*

Problème 4 *Soit la fonction i définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $i(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.*

1. *Simplifier l'expression de i et étudier sa continuité sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.*

2. *Calculer la limite de i en $x = 1$.*

3. *Prolonger i par continuité en $x = 1$.*

Solution 4 1. *On peut simplifier $i(x)$ en factorisant le dénominateur :*

$$i(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \quad \textit{pour} \quad x \neq -1,\ x \neq 1.$$

La fonction i est une fonction rationnelle dont le dénominateur $x^2 - 1$ ne s'annule qu'en -1 et en 1 ; elle est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (Théorème 3.1 (ii) et Définition 3.2 du cours 3 [2]).

2. *La limite de i en $x = 1$ est :*

$$\lim_{x \to 1} i(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

car i coïncide avec $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ pour $x \neq 1$ au voisinage de 1 (cours 2 [1]), et cette fonction est continue en 1 (Théorème 3.1 du cours 3 [2]).

3. *Le prolongement par continuité de i en $x = 1$ est donné par $i(1) = \frac{1}{2}$ (Définition 3.3 du cours 3 [2], avec $I =]-1, +\infty[$).*

Problème 5 *Soit la fonction j définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$j(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+4}{x-2} & \textit{si } x \neq 2, \\ 0 & \textit{si } x = 2. \end{cases}$$

1. *Montrer que j est continue en tout point de $\mathbb{R}$ sauf peut-être en $x = 2$.*

2. *Calculer la limite de j en $x = 2$.*

3. *Montrer que j est continue en $x = 2$.*

Solution 5 1. *Pour $x \neq 2$, $j(x)$ est le quotient de deux polynômes dont le dénominateur $x - 2$ ne s'annule ni sur $]-\infty, 2[$ ni sur $]2, +\infty[$; j est donc continue sur ces deux intervalles (cours 2 [1] et Théorème 3.1 du cours 3 [2]), c'est-à-dire en tout point de $\mathbb{R}$ sauf peut-être en $x = 2$.*

2. *On peut simplifier l'expression de $j(x)$ pour $x \neq 2$:*

$$j(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2 \quad \textit{pour} \quad x \neq 2.$$

Comme j coïncide avec $x \mapsto x - 2$ pour $x \neq 2$, et que cette fonction est continue en 2 (Théorème 3.1 du cours 3 [2]), la limite de j en $x = 2$ est $2 - 2 = 0$ (cours 2 [1]).

3. *On a $\lim_{x \to 2} j(x) = 0 = j(2)$, donc j est continue en $x = 2$ (Définition 3.1 du cours 3 [2]). Avec la question 1, j est continue sur $\mathbb{R}$ (Définition 3.2 du cours 3 [2]) ; aucun prolongement n'est nécessaire, puisque j est déjà définie en 2.*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.