Problèmes type Bac & Solutions : Fonction dérivée, dérivation

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 4.5 du cours 4* désigne un énoncé numéroté du cours 4 [3], et un renvoi comme *Théorème 2.4 du cours 2* ou *Théorème 3.3 du cours 3* un énoncé des cours sur la limite d'une fonction [1] et sur la continuité [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

1. *Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée $f'(x)$.*
2. *Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.*
3. *Déterminer les coordonnées du point de la courbe de f où la tangente est horizontale.*
4. *Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.*

Solution 1 1. *La fonction f est la composée $\sqrt{u}$, où $u(x) = x^2 - 2x + 2$ est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$ (Théorème 4.3 (iv) du cours 4 [3]), de dérivée $u'(x) = 2x - 2$. Le polynôme sous la racine vérifie*

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 \ ;$$

il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. Par le Corollaire 4.1 du cours 4 [3], f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

2. *Simplifions $f'(x)$:*

$$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $x-1$: $f'(x) < 0$ pour $x < 1$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 1$. Par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3], la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, avec $f(1) = \sqrt{1} = 1$. Le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(les limites en $\pm\infty$ sont calculées à la question 4).

3. *La tangente au point d'abscisse a est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$ (Définition 4.3 du cours 4 [3] : pente nulle), ce qui se produit seulement pour $a = 1$. Les coordonnées du point correspondant sur la courbe sont $(1, f(1)) = (1, 1)$.*

4. *Pour $x \neq 0$,*
$$x^2 - 2x + 2 = x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right).$$
En $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ et la parenthèse vers 1 (Théorèmes 2.1 (i), (ii) et 2.2 (i) du cours 2), donc $x^2 - 2x + 2$ tend vers $+\infty$ (Théorème 2.2 (ii) du cours 2 [1]). Comme $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ (Théorème 2.1 (iii) du cours 2), le Théorème 2.4 du cours 2 [1] (fonction composée) donne
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = +\infty.$$
Il en est de même en $-\infty$, car x^2 y tend aussi vers $+\infty$:
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = +\infty.$$

Problème 2 *Soit la fonction f définie par*
$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.*
2. *Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée $f'(x)$.*
3. *Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.*
4. *Déterminer les limites de f en -1, $+\infty$ et $-\infty$.*
5. *Trouver l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.*

Solution 2 *1. D'abord, il faut que $x \neq -1$. Ensuite, on résout, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,*

$$\frac{x-1}{x+1} \geq 0.$$

En dressant un tableau de signes, on obtient $x \in]-\infty, -1[\cup[1, +\infty[$. Donc le domaine de définition de f est :

$$D_f =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[.$$

2. Soit $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$, de sorte que $f = \sqrt{u}$. La fonction rationnelle u est dérivable sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$ (Théorème 4.3 (iv) du cours 4 [3]), avec

$$u'(x) = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

La racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$ (Théorème 4.2 du cours 4 [3]) ; on résout donc, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{x-1}{x+1} > 0.$$

Cela donne $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Par le Corollaire 4.1 du cours 4 [3], appliqué sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$, f est dérivable sur

$$D_{f'} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[,$$

et pour $x \in D_{f'}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}. \end{aligned}$$

Pour $x > 1$ seulement, $x-1$ et $x+1$ sont positifs, et cette expression s'écrit aussi $\frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x-1}}$.

3. Pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) > 0$. Comme D_f n'est pas un intervalle, on étudie les variations sur chacun de ses deux morceaux.

- *Sur l'intervalle $]-\infty, -1[$, f est dérivable, donc continue (Théorème 4.1 du cours 4), et $f' > 0$: f y est strictement croissante (Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3]).*
- *Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, f est continue : la fonction rationnelle u est continue sur $[1, +\infty[$, où $u \geq 0$, et la racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$ (Théorèmes 3.1 et 3.3 du cours 3 [2]). De plus, f est dérivable en tout point de $]1, +\infty[$, avec $f' > 0$. Par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3], f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.*

La fonction f n'est pas croissante sur D_f tout entier : par exemple $f(-2) = \sqrt{3} > f(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. *Près de -1, la fonction f n'est définie qu'à gauche de -1, sur $]-\infty, -1[$; on peut donc calculer sa limite à gauche. Quand x tend vers -1 par la gauche, le numérateur $x-1$ tend vers -2 et le dénominateur $x+1$ tend vers 0 en restant négatif, donc $u(x)$ tend vers $+\infty$ (Théorème 2.3 (ii) du cours 2 [1]). Comme $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ (Théorème 2.1 (iii) du cours 2), le Théorème 2.4 du cours 2 [1] donne*

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty.$$

En $+\infty$, pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, $u(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ tend vers 1 (Théorèmes 2.1 (i), 2.2 et 2.3 (i) du cours 2), et la racine carrée est continue en 1, donc (Théorèmes 2.1 (iv) et 2.4 du cours 2 [1])

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

Il en est de même en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

5. *Pour trouver l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2, qui appartient à $D_{f'}$ (question 2), nous calculons d'abord $f(2)$ et $f'(2)$:*

$$f(2) = \sqrt{\frac{2-1}{2+1}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

L'équation de la tangente en $a = 2$ est donc (Définition 4.3 du cours 4 [3]) :

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}(x-2) + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}x - 2\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{3\sqrt{3}}{9} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}x + \frac{\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.