Problèmes type Bac & Solutions : Fonction logarithme

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 5.1 du cours 5* désigne un énoncé numéroté du cours 5 [3], et un renvoi comme *Théorème 2.2 du cours 2* ou *Théorème 4.5 du cours 4* un énoncé des cours sur la limite d'une fonction [1] et sur la dérivation [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x$.*

1. *Démontrer que la fonction f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée $f'(x)$.*
2. *Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de la fonction f.*
3. *Calculer la limite de f en 0^+ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.*
4. *Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.*
5. *On définit la fonction g sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - x$. Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g.*

Solution 1

1. *La fonction f est la somme de la fonction* ln*, dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $\frac{1}{x}$ (Définition 5.1 du cours 5 [3]), et de la fonction identité, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée 1 (Théorème 4.2 du cours 4 [2]). Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (Théorème 4.3 du cours 4), donc continue sur cet intervalle (Théorème 4.1 du cours 4 [2]). Sa dérivée est donnée par :*

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

2. *La dérivée $f'(x)$ est strictement positive pour tout $x > 0$ car $\frac{1}{x} > 0$ et $1 > 0$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (Théorème 4.5 du cours 4 [2]).*

3. *Comme* $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ *(Théorème 5.4 du cours 5 [3]), et comme* x *tend vers* 0 *en* 0^+ *et vers* $+\infty$ *en* $+\infty$*, les limites de* f *sont (Théorème 2.2 du cours 2 [1]) :*

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln(x) + x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} (\ln(x) + x) = +\infty.$$

Graphiquement, la première limite signifie que la droite d'équation $x = 0$ *(l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe représentative de* f *(Définition 2.5 du cours 2 [1]) : la courbe descend vers* $-\infty$ *lorsque* x *tend vers* 0^+*. La seconde signifie que la courbe monte vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$*.*

4. *Pour résoudre l'équation* $f(x) = x$*, on cherche* $x > 0$ *tel que*

$$\begin{aligned} \ln(x) + x &= x \\ \ln(x) &= 0 = \ln(1) \\ x &= 1, \end{aligned}$$

la dernière étape venant du Théorème 5.1 du cours 5 [3]. Donc $S = \{1\}$*.*

5. *La fonction* g *est la différence de la fonction* $\ln$ *et de la fonction identité. Pour étudier la position relative des courbes de* f *et* g*, on calcule* $f(x) - g(x)$ *:*

$$f(x) - g(x) = (\ln(x) + x) - (\ln(x) - x) = 2x.$$

Comme $2x > 0$ *pour tout* $x > 0$*, la courbe représentative de* f *est toujours au-dessus de celle de* g *sur* $]0, +\infty[$*.*

Problème 2 *Soit la fonction* f *définie sur l'intervalle* $]0, +\infty[$ *par* $f(x) = x\ln(x) - x$*.*

1. *Montrer que la fonction* f *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et calculer* $f'(x)$*.*
2. *Étudier les variations de la fonction* f *et dresser son tableau de variations.*
3. *Déterminer la limite de* f *en* 0^+ *et en* $+\infty$*.*
4. *Résoudre l'équation* $f(x) = 0$*.*

Solution 2 *1. La fonction* $x \mapsto x\ln(x)$ *est le produit de deux fonctions dérivables sur* $]0, +\infty[$ *(Définition 5.1 du cours 5 [3] et Théorème 4.2 du cours 4), et* f *est la différence de ce produit et de la fonction identité ; donc* f *est dérivable sur cet intervalle (Théorème 4.3 du cours 4), donc continue (Théorème 4.1 du cours 4 [2]). Sa dérivée est donnée par :*

$$f'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x).$$

2. *La dérivée* $f'(x) = \ln(x)$ *est strictement positive si* $x > 1$*, nulle en* 1*, et strictement négative si* $0 < x < 1$ *(Théorème 5.1 du cours 5 [3]). Ainsi,* f *est strictement décroissante sur* $]0, 1]$ *et strictement croissante sur* $[1, +\infty[$ *(Théorème 4.5 du cours 4 [2]). De plus,* $f(1) = 1 \cdot \ln(1) - 1 = -1$*. Avec les limites calculées à la question 3, le tableau de variations est le suivant :*

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. *On a* $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ *(Théorème 5.5 du cours 5 [3] avec* $n = 1$*), donc (Théorème 2.2 du cours 2 [1])*

$$\lim_{x\to 0^+} (x\ln(x) - x) = \left(\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)\right) - \left(\lim_{x\to 0^+} x\right) = 0 - 0 = 0.$$

En $+\infty$*, pour* $x > 1$*,* $\ln(x) > 0$ *(Théorème 5.1 du cours 5 [3]) et on peut écrire*

$$x\ln(x) - x = x\ln(x)\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right).$$

Comme $\ln(x)$ *tend vers* $+\infty$ *(Théorème 5.4 du cours 5 [3]),* $\frac{1}{\ln(x)}$ *tend vers* 0*, donc* $1 - \frac{1}{\ln(x)}$ *tend vers* 1*, et* $x\ln(x)$ *tend vers* $+\infty$ *(Théorèmes 2.2 et 2.3 du cours 2 [1]), donc*

$$\lim_{x\to+\infty} (x\ln(x) - x) = +\infty.$$

4. *L'équation* $f(x) = 0$ *se réduit à* $x\ln(x) - x = 0$*, soit* $x(\ln(x) - 1) = 0$*. Comme* $x > 0$*, on obtient* $\ln(x) - 1 = 0$*, soit* $\ln(x) = 1 = \ln(e)$ *(Définition 5.2 du cours 5 [3]). Cette équation a une unique solution,* $x = e$ *(Théorème 5.1 du cours 5 [3]). Donc* $S = \{e\}$*. Ce résultat est cohérent avec le tableau de variations : pour* $0 < x < e$*,* $\ln(x) < 1$*, donc* $f(x) = x(\ln(x) - 1) < 0$*, et* f *ne s'annule qu'en* $e \approx 2{,}718$*, qui est bien dans* $[1, +\infty[$*.*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.