Problèmes type Bac & Solutions : Fonction exponentielle

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 6.8 du cours 6* désigne un énoncé numéroté du cours 6 [3], et un renvoi comme *Théorème 2.2 du cours 2*, *Théorème 4.5 du cours 4* ou *Théorème 9.8 du cours 9*, un énoncé des cours sur la limite d'une fonction [1], sur la dérivation [2] et sur les primitives et les intégrales [4]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 6$.*

1. *Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.*
2. *Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.*
3. *Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.*
4. *Résoudre l'équation $f(x) = 0$.*

Solution 1 1. *En $+\infty$, la limite est de la forme $+\infty - \infty$; on factorise par e^{2x}, en utilisant $\frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$ et $\frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$ (Théorème 6.2 du cours 6 [3]) :*

$$f(x) = e^{2x}\left(1 - 5e^{-x} + 6e^{-2x}\right).$$

Quand $x \to +\infty$, $2x \to +\infty$ et $-x \to -\infty$, donc $e^{2x} \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$ et $e^{-2x} \to 0$ (Théorème 6.8 du cours 6 [3] et Théorème 2.4 du cours 2 [1]). Par le Théorème 2.2 du cours 2 [1],

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

En $-\infty$, $e^x \to 0$ et $e^{2x} \to 0$ (mêmes théorèmes), donc, par le Théorème 2.2 du cours 2 [1],

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 5 \times 0 + 6 = 6.$$

La droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$ (Définition 2.4 du cours 2 [1]).

2. *Les fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $2e^{2x}$ et e^x (Théorèmes 6.4 et 6.6 du cours 6 [3]). La fonction f est une somme de multiples de ces fonctions et d'une constante, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]), et*

$$f'(x) = 2e^{2x} - 5e^x = e^x(2e^x - 5).$$

3. *Comme $e^x > 0$ (Théorème 6.1 du cours 6 [3]), $f'(x)$ a le signe de $2e^x - 5$. Or, comme $\frac{5}{2} > 0$,*

$$2e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

(Théorème 6.10 du cours 6 [3]), et de même $2e^x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{5}{2}\right)$, avec $f'\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right) = 0$. Par le Théorème 4.5 du cours 4 [2], f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \ln\left(\frac{5}{2}\right)\right]$ et strictement croissante sur $\left[\ln\left(\frac{5}{2}\right), +\infty\right[$. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{5}{2}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

En effet, comme $e^{\ln\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{5}{2}$ (Théorème 6.1 du cours 6) et $e^{2x} = (e^x)^2$ (Théorème 6.2 du cours 6 [3]),

$$f\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \times \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{1}{4}.$$

4. *Pour résoudre $f(x) = 0$, on cherche les solutions de l'équation $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$. En posant $y = e^x$, avec $y > 0$ (Théorème 6.1 du cours 6 [3]), et comme $e^{2x} = y^2$, on obtient l'équation du second degré $y^2 - 5y + 6 = 0$, soit $(y-2)(y-3) = 0$, dont les solutions sont $y = 2$ et $y = 3$. Elles sont strictement positives, donc elles conviennent. Par le Théorème 6.10 du cours 6 [3], $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$ et $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$. Donc $S = \{\ln(2), \ln(3)\}$.*

Problème 2 *Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$g(x) = xe^x - 3e^x + 2.$$

1. *Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.*
2. *Déterminer la dérivée $g'(x)$ de la fonction g.*
3. *Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.*
4. *Calculer l'intégrale $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ par intégration par parties.*

Solution 2

1. *En $+\infty$, on écrit $g(x) = (x-3)e^x + 2$: comme $x - 3 \to +\infty$ et $e^x \to +\infty$ (Théorème 6.8 du cours 6 [3]), le Théorème 2.2 du cours 2 [1] donne*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

En $-\infty$, la limite de xe^x est une forme indéterminée $\infty \times 0$; mais $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par les croissances comparées (Théorème 6.9 du cours 6 avec $n = 1$), et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (Théorème 6.8 du cours 6 [3]). Par le Théorème 2.2 du cours 2 [1],

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 - 3 \times 0 + 2 = 2.$$

2. *La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit, somme et multiple de fonctions dérivables (Théorème 6.4 du cours 6 [3], Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]). Par la règle de dérivation d'un produit (Théorème 4.3 du cours 4 [2]), la dérivée de xe^x est $1 \times e^x + xe^x$, donc*

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x + xe^x - 3e^x \\ &= xe^x - 2e^x = (x-2)e^x. \end{aligned}$$

3. *Comme $e^x > 0$ (Théorème 6.1 du cours 6 [3]), le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 2$. Par le Théorème 4.5 du cours 4 [2], g est strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations :*

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

où $g(2) = 2e^2 - 3e^2 + 2 = -e^2 + 2$.

4. *Pour calculer $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$, on utilise l'intégration par parties (Théorème 9.8 du cours 9 [4]), avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$, dérivables sur $\mathbb{R}$, de*

dérivées $u'(x) = e^x$ (Théorèmes 6.3 et 6.4 du cours 6 [3]) et $v'(x) = 1$ continues ; comme e^x est une primitive de e^x,

$$\int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = [xe^x - e^x]_0^1.$$

Ainsi, par linéarité de l'intégrale (Théorème 9.7 (i) du cours 9 [4], appliqué deux fois), les fonctions intégrées étant continues sur $[0, 1]$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x) \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (xe^x - 3e^x + 2) \,\mathrm{d}x \\ &= [xe^x - e^x]_0^1 - 3[e^x]_0^1 + 2[x]_0^1 \\ &= [e - e - (0 - 1)] - 3[e - 1] + 2[1 - 0] = -3e + 6.\end{aligned}$$

Problème 3 *Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$h(x) = (x^2 - 4)e^x.$$

1. *Déterminer les limites de h en $+\infty$ et $-\infty$.*
2. *Calculer $h'(x)$, la dérivée de la fonction h.*
3. *Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.*
4. *Trouver les points d'intersection de la courbe représentative de h avec les axes du repère.*
5. *Résoudre l'inéquation $h(x) \geq 0$.*
6. *Calculer l'intégrale $\int_{-2}^{2} h(x) \,\mathrm{d}x$ en utilisant l'intégration par parties deux fois.*

Solution 3

1. *En $+\infty$, $x^2 - 4 \to +\infty$ et $e^x \to +\infty$ (Théorème 6.8 du cours 6 [3]), donc, par le Théorème 2.2 du cours 2 [1], $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. En $-\infty$, on écrit $h(x) = x^2e^x - 4e^x$: $x^2e^x \to 0$ par les croissances comparées (Théorème 6.9 du cours 6 avec $n = 2$), et $e^x \to 0$ (Théorème 6.8 du cours 6 [3]). Donc, par le Théorème 2.2 du cours 2 [1],*

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 - 4 \times 0 = 0.$$

   On dit que e^x l'emporte sur $x^2 - 4$.

2. *La dérivée de h est obtenue par la règle de dérivation d'un produit (Théorème 4.3 du cours 4 [2]), avec $(e^x)' = e^x$ (Théorème 6.4 du cours 6 [3]) :*

$$h'(x) = (2x)e^x + (x^2 - 4)e^x = (x^2 + 2x - 4)e^x.$$

3. *Comme $e^x > 0$ (Théorème 6.1 du cours 6 [3]), $h'(x)$ a le signe de $x^2 + 2x - 4$, dont le discriminant est $\Delta = 4 + 16 = 20 > 0$:*

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}.$$

Le trinôme $x^2 + 2x - 4$ est strictement positif à l'extérieur de ses racines et strictement négatif entre elles. Par le Théorème 4.5 du cours 4 [2], h est strictement croissante sur $]-\infty, -1-\sqrt{5}]$ et sur $[-1+\sqrt{5}, +\infty[$, et strictement décroissante sur $[-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}]$. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$h(-1-\sqrt{5})$	$\searrow$	$h(-1+\sqrt{5})$	$\nearrow$	$+\infty$

4. *La courbe coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0, d'ordonnée $h(0) = (0-4)e^0 = -4$: c'est le point $(0, -4)$. Pour l'axe des abscisses, on résout $h(x) = 0$; comme $e^x \neq 0$ (Théorème 6.1 du cours 6 [3]),*

$$(x^2 - 4)e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Les points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $(-2, 0)$ et $(2, 0)$.

5. *Comme $e^x > 0$ (Théorème 6.1 du cours 6 [3]), $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0$, ce qui a lieu à l'extérieur des racines -2 et 2, bornes comprises :*

$$h(x) \geq 0 \quad \textit{pour} \quad x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\,.$$

6. *Pour calculer l'intégrale $\int_{-2}^{2} h(x)\,\mathrm{d}x$ où $h(x) = (x^2-4)e^x$, nous utilisons l'intégration par parties deux fois (Théorème 9.8 du cours 9 [4]), avec chaque fois $u(x) = e^x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u'(x) = e^x$ continue (Théorèmes 6.3 et 6.4 du cours 6 [3]).*

Première intégration par parties :
Soit $v(x) = x^2 - 4$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $v'(x) = 2x$ continue. Comme $v(-2) = v(2) = 0$,

$$\int_{-2}^{2} (x^2-4)e^x\,\mathrm{d}x = \left[(x^2-4)e^x\right]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} 2xe^x\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{2} 2xe^x\,\mathrm{d}x.$$

Deuxième intégration par parties :
Soit $v(x) = 2x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $v'(x) = 2$ continue. Comme $2e^x$ est une primitive de $2e^x$,

$$\int_{-2}^{2} 2xe^x\,\mathrm{d}x = [2xe^x]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} 2e^x\,\mathrm{d}x = [2xe^x - 2e^x]_{-2}^{2}\,.$$

Conclusion :
En reportant le second calcul dans le premier,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} h(x)\,\mathrm{d}x &= -\left[(2x-2)e^{x}\right]_{-2}^{2}\\ &= -\left(2e^{2}-(-6)e^{-2}\right)\\ &= -2e^{2}-6e^{-2}.\end{aligned}$$

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 9. Primitive et intégrale, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.