Problèmes type Bac & Solutions : Probabilité

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 7.4 du cours 7* désigne un énoncé numéroté du cours 7 [1], et un renvoi au *cours 10*, le cours sur les variables aléatoires [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *Un sac contient 5 billes bleues et 3 billes rouges. Les billes sont indiscernables au toucher. On effectue une série de tirages sans remise jusqu'à ce que toutes les billes bleues soient tirées.*

1. *Quelle est la probabilité de tirer une bille bleue lors du premier tirage ?*
2. *Si la première bille tirée est bleue, quelle est la probabilité que la deuxième bille tirée soit également bleue ?*
3. *Quelle est la probabilité de tirer exactement deux billes rouges lors des trois premiers tirages ?*
4. *On effectue trois tirages sans remise. Quelle est la probabilité que parmi les trois billes tirées, il y ait au moins une bille rouge ?*

Solution 1 *Notons B_k l'événement* la k-ième bille tirée est bleue *et $R_k = \overline{B_k}$ l'événement* la k-ième bille tirée est rouge. *Les billes étant indiscernables au toucher, chaque tirage se fait au hasard parmi les billes restantes (Remarque 7.2 du cours 7 [1]).*

1. *Il y a 5 billes bleues sur un total de 8 billes, donc, par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*
$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{5}{8}.$$
2. *On a $\mathbf{P}(B_1) = \frac{5}{8} > 0$. Si la première bille tirée est bleue, il reste 4 billes bleues et 3 billes rouges, soit 7 billes au total, et la deuxième bille est tirée au hasard parmi elles. Donc*
$$\mathbf{P}(B_2 \mid B_1) = \frac{4}{7}.$$

3. *Pour tirer exactement deux billes rouges lors des trois premiers tirages, la bille bleue peut être tirée en troisième, deuxième ou première position : l'événement cherché est la réunion des événements*

$$R_1 \cap R_2 \cap B_3, \qquad R_1 \cap B_2 \cap R_3, \qquad B_1 \cap R_2 \cap R_3,$$

deux à deux incompatibles, car deux d'entre eux diffèrent par la couleur d'au moins un des trois tirages. Pour chacun d'eux, l'intersection des deux premiers événements qui le composent ($R_1 \cap R_2$, $R_1 \cap B_2$ ou $B_1 \cap R_2$) a une probabilité strictement positive (par exemple $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} > 0$, par le Théorème 7.4 (i) du cours 7), donc, par le Théorème 7.4 (ii) du cours 7 [1], en comptant à chaque tirage les billes restantes,

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}, \qquad \mathbf{P}(R_1 \cap B_2 \cap R_3) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6},$$
$$\mathbf{P}(B_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}.$$

Ces trois probabilités sont égales à $\frac{30}{336}$. Par le Corollaire 7.1 du cours 7 [1], la probabilité cherchée est leur somme :

$$3 \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 5}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{90}{336} = \frac{15}{56}.$$

4. *L'événement* au moins une bille rouge parmi les trois *est le contraire de l'événement $B_1 \cap B_2 \cap B_3$. Comme $\mathbf{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} > 0$, par le Théorème 7.4 (ii) du cours 7,*

$$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28},$$

donc, par le Théorème 7.1 (iv) du cours 7 [1],

$$\mathbf{P}(\textit{au moins une rouge}) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}.$$

Problème 2 *Dans une école, 60 % des élèves étudient l'anglais, 40 % étudient l'espagnol, et 20 % étudient les deux langues. Un élève est choisi au hasard.*

1. *Quelle est la probabilité que l'élève choisi étudie l'anglais, sachant qu'il étudie l'espagnol ?*

2. *Quelle est la probabilité que l'élève choisi étudie l'espagnol, sachant qu'il étudie l'anglais ?*

Solution 2 *Soient A l'événement* l'élève étudie l'anglais *et E l'événement* l'élève étudie l'espagnol. *L'élève étant choisi au hasard, ces pourcentages sont des probabilités (Théorème 7.2 du cours 7 [1]) :*

$$\mathbf{P}(A) = 0{,}6, \quad \mathbf{P}(E) = 0{,}4, \quad \mathbf{P}(A \cap E) = 0{,}2.$$

1. *Comme* $\mathbf{P}(E) > 0$*, par la Définition 7.4 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(A \mid E) = \frac{\mathbf{P}(A \cap E)}{\mathbf{P}(E)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5.$$

La probabilité que l'élève étudie l'anglais sachant qu'il étudie l'espagnol est donc 0,5*.*

2. *De même, comme* $\mathbf{P}(A) > 0$*,*

$$\mathbf{P}(E \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap E)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité que l'élève étudie l'espagnol sachant qu'il étudie l'anglais est donc $\frac{1}{3}$*.*

Problème 3 *Une entreprise produit des tablettes électroniques. Chaque tablette est soit défectueuse, soit non défectueuse. On sait que 3 % des tablettes produites sont défectueuses, et on suppose que les états des différentes tablettes sont indépendants les uns des autres. Les tablettes sont testées une par une jusqu'à ce qu'une tablette défectueuse soit trouvée ou que 100 tablettes aient été testées.*

1. *Quelle est la probabilité que la première tablette testée soit défectueuse ?*
2. *Quelle est la probabilité que la première tablette défectueuse apparaisse lors du cinquième test ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'aucune tablette défectueuse ne soit trouvée lors des 100 tests ?*
4. *On change de procédure : on teste désormais systématiquement 100 tablettes, sans s'arrêter à la première tablette défectueuse. Chaque tablette défectueuse fait perdre 150 euros à l'entreprise, et chaque test lui coûte 2 euros. Calculer l'espérance de la perte totale pour un cycle de 100 tests. (Cette question utilise les variables aléatoires et leur espérance, étudiées dans le cours 10 [2].)*

Solution 3 *Pour* $1 \leq i \leq 100$*, notons* D_i *l'événement* la i-ième tablette de la série (testée ou non) est défectueuse*. D'après l'énoncé,* $\mathbf{P}(D_i) = 0{,}03$*, donc* $\mathbf{P}(\overline{D_i}) = 0{,}97$ *(Théorème 7.1 (iv) du cours 7), et les événements* $D_1, \ldots, D_{100}$ *sont mutuellement indépendants (Définition 7.7 et Remarque 7.4 du cours 7 [1]).*

1. *La probabilité que la première tablette testée soit défectueuse est* $\mathbf{P}(D_1) = 0{,}03$*.*
2. *La première tablette défectueuse apparaît lors du cinquième test si et seulement si l'événement* $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4} \cap D_5$ *est réalisé. Les événements* $\overline{D_1}, \ldots, \overline{D_4}, D_5$ *sont mutuellement indépendants (Théorème 7.9 du cours 7), donc, par la Définition 7.7 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4} \cap D_5) = (0{,}97)^4 \times 0{,}03 \approx 0{,}027.$$

3. *Aucune tablette défectueuse n'est trouvée lors des 100 tests si et seulement si l'événement* $\overline{D_1} \cap \cdots \cap \overline{D_{100}}$ *est réalisé. De même, par le Théorème 7.9 et la Définition 7.7 du cours 7 [1], sa probabilité est*

$$(0{,}97)^{100} \approx 0{,}048.$$

4. *Soit* X *le nombre de tablettes défectueuses parmi les 100 testées. On a* $X = X_1 + \cdots + X_{100}$*, où* X_i *vaut* 1 *si* D_i *est réalisé et* 0 *sinon. Chaque* X_i *est une variable de Bernoulli de paramètre* $\mathbf{P}(D_i) = 0{,}03$*, donc* $\mathbf{E}[X_i] = 0{,}03$ *(cours 10, transparent* Variable aléatoire de Bernoulli*), et, par la linéarité de l'espérance (cours 10 [2], transparent* Espérance d'une variable aléatoire*),*

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_{100}] = 100 \times 0{,}03 = 3.$$

La perte totale est $L = 150X + 200$ *euros, les 100 tests coûtant* $100 \times 2 = 200$ *euros. Par la linéarité de l'espérance à nouveau,*

$$\mathbf{E}[L] = 150\,\mathbf{E}[X] + 200 = 150 \times 3 + 200 = 650 \text{ euros.}$$

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 10. Variable aléatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.