Problèmes type Bac & Solutions : Fonction convexe

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 8.1 du cours 8* désigne un énoncé numéroté du cours 8 [5], et un renvoi comme *Théorème 4.5 du cours 4*, un énoncé numéroté des cours sur les limites [1], la dérivée [2], le logarithme [3] ou l'exponentielle [4]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par*

$$f(x) = x^2 \ln(x).$$

1. *Montrer que f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.*
2. *Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.*
3. *Calculer la dérivée seconde $f''(x)$ et étudier son signe. Que peut-on en conclure sur la convexité de f ?*
4. *Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.*
5. *Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 \ln(x) - \frac{3}{2}x^2$. Étudier les points d'inflexion de la courbe de g.*

Solution 1

1. *Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $\ln$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$ (Théorème 4.2 du cours 4) ; par le Théorème 4.3 (ii) du cours 4 [2], leur produit f est dérivable sur $[1, +\infty[$, et*

$$f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x.$$

2. *On a*

$$f'(x) = x\left(2\ln(x) + 1\right).$$

Pour $x \geq 1 > 0$, $\ln(x) \geq 0$ (Théorème 5.1 (iii) du cours 5 [3]), donc $2\ln(x) + 1 \geq 1 > 0$ et $f'(x) > 0$. Par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [2], f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

3. *La fonction f' est dérivable sur $[1,+\infty[$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]), et*

$$f''(x) = (2x\ln(x))' + 1 = \left(2\ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x}\right) + 1 = 2\ln(x) + 3.$$

Comme $\ln(x) \geq 0$ sur $[1,+\infty[$ (Théorème 5.1 (iii) du cours 5 [3]), $f''(x) \geq 3 > 0$ sur cet intervalle. Donc f est convexe sur $[1,+\infty[$ (Théorème 8.1 du cours 8 [5]).

4. *On a $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ (Théorème 2.1 (ii) du cours 2 [1]) et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ (Théorème 5.4 du cours 5 [3]). Par le Théorème 2.2 (ii) du cours 2 [1],*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln(x) = +\infty.$$

5. *La fonction f n'est définie que sur $[1,+\infty[$: on dérive g directement sur $]0,+\infty[$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]) :*

$$g'(x) = 2x\ln(x) + x - 3x = 2x\ln(x) - 2x,$$

$$g''(x) = 2\ln(x) + 2 - 2 = 2\ln(x).$$

Par le Théorème 5.1 (iii) du cours 5 [3], $g''(x) < 0$ pour $0 < x < 1$ et $g''(x) > 0$ pour $x > 1$: g'' change de signe en 1, qui n'est pas une borne de $]0,+\infty[$ ($h = 1$ convient, car $]0,2[\subset]0,+\infty[$). La courbe de g admet donc un point d'inflexion en $A(1, g(1)) = A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ (Définition 8.3 du cours 8 [5]). C'est le seul, car g'' ne s'annule qu'en 1 (Remarque 8.2 du cours 8 [5]).

Problème 2 *Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,4]$ par*

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1.$$

1. *Montrer que f est dérivable sur $[0,4]$ et calculer $f'(x)$.*
2. *Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0,4]$.*
3. *Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.*
4. *Étudier le signe de $f''(x)$ sur $[0,4]$ et conclure sur la convexité de f sur cet intervalle.*
5. *Trouver les points d'inflexion de la courbe de f.*

Solution 2

1. *La fonction f est un polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]), et en particulier sur $[0,4]$:*

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12.$$

2. *On factorise :*

$$f'(x) = 3\left(x^2 - 4x + 4\right) = 3(x-2)^2.$$

Donc $f'(x) > 0$ pour $x \neq 2$ et $f'(2) = 0$. Comme f' ne s'annule qu'en un point, f est strictement croissante sur $[0,4]$ (Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [2]).

3. *La fonction f' est un polynôme, donc elle est dérivable sur $[0,4]$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]), et la dérivée seconde de f est*

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2).$$

4. *On a $f''(x) < 0$ pour $x < 2$, $f''(2) = 0$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 2$. Donc f est concave sur $[0,2]$ (Corollaire 8.1 du cours 8) et convexe sur $[2,4]$ (Théorème 8.1 du cours 8 [5]).*

5. *La dérivée seconde change de signe en 2, qui n'est pas une borne de $[0,4]$ ($h = 2$ convient, car $]0,4[\subset [0,4]$) : la courbe de f admet un point d'inflexion en $A(2, f(2)) = A(2,9)$ (Définition 8.3 du cours 8 [5]). C'est le seul, car f'' ne s'annule qu'en 2 (Remarque 8.2 du cours 8 [5]).*

Problème 3 *Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$g(x) = e^{2x} - 4e^x + 4.$$

1. *Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.*

2. *Calculer la dérivée seconde $g''(x)$.*

3. *Étudier le signe de $g''(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

4. *Conclure sur la convexité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.*

5. *Trouver les réels x tels que $g(x) = 0$.*

Solution 3

1. *La fonction g est la somme de $x \mapsto e^{2x}$, de $x \mapsto -4e^x$ et d'une constante. Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (Théorèmes 6.4 et 6.6 du cours 6 [4], et Théorème 4.2 du cours 4 pour la constante), donc g aussi (Théorème 4.3 (i) du cours 4 [2]), et*

$$g'(x) = 2e^{2x} - 4e^x.$$

2. *De même, la dérivée seconde de g est*

$$g''(x) = 4e^{2x} - 4e^x.$$

3. *Comme* $e^{2x} = (e^x)^2$ *(Théorème 6.2 (iii) du cours 6 [4]),* $g''(x) = 4e^x(e^x - 1)$. *Comme* $e^x > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *(Théorème 6.1 (i) du cours 6 [4]), le signe de* $g''(x)$ *est celui de* $e^x - 1$. *Comme* $e^0 = 1$ *(Théorème 6.1 (iv) du cours 6), le Théorème 6.5 (ii) du cours 6 [4] donne :*

   - *pour* $x > 0$, $e^x > 1$, *donc* $g''(x) > 0$;
   - *pour* $x < 0$, $e^x < 1$, *donc* $g''(x) < 0$;
   - *pour* $x = 0$, $g''(0) = 0$.

4. *Par le Théorème 8.1 et le Corollaire 8.1 du cours 8 [5],* g *est convexe sur* $[0, +\infty[$ *et concave sur* $]-\infty, 0]$. *La dérivée seconde change de signe en* 0, *qui n'est pas une borne de* $\mathbb{R}$ *(tout* $h > 0$ *convient) : la courbe de* g *admet un point d'inflexion en* $A(0, g(0)) = A(0, 1)$ *(Définition 8.3 du cours 8 [5]).*

5. *On remarque que* $g(x) = (e^x)^2 - 4e^x + 4 = (e^x - 2)^2$. *Donc*

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2),$$

   par le Théorème 6.10 (ii) du cours 6 [4]. Le seul réel cherché est $x = \ln(2)$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 8. Fonction convexe, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.