Problèmes type Bac & Solutions : Primitive et intégrale

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 9.1 du cours 9* désigne un énoncé numéroté du cours 9 [6], et un renvoi comme *Théorème 4.5 du cours 4*, un énoncé numéroté des cours sur les limites [1], la continuité [2], la dérivée [3], le logarithme [4], l'exponentielle [5] ou les fonctions trigonométriques [7]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = e^{-x}\cos(x).$$

1. *Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) - \cos(x))$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. *Calculer l'intégrale $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.*

3. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq e^{-x}$.*

4. *Montrer que pour tout $a > 0$,*

$$\int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 1 - e^{-a}.$$

En déduire que, pour tout $a > 0$,

$$\int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 1.$$

5. *Montrer que*

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Solution 1 *1. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $-e^{-x}$ (Théorème 6.6 du cours 6 [5]), et* sin, cos *sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$ *(Théorème 4.2 du cours 4 [3]). Par le Théorème 4.3 du cours 4 [3], F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{-x}(\sin(x) - \cos(x))\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(-e^{-x}(\sin(x) - \cos(x)) + e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-x}(-\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) + \sin(x)) \\ &= e^{-x}\cos(x) = f(x). \end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (Définition 9.1 du cours 9 [6]).

2. *La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de $x \mapsto -x$ et de* exp *(Théorèmes 3.1 (i), 3.1 (iv) et 3.3 du cours 3), et* cos *aussi (Théorème 3.1 (iv) du cours 3) ; leur produit f est donc continu sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.2 (i) du cours 3 [2]). Par la Définition 9.2 du cours 9 [6], on utilise la primitive F ; comme* $\sin(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ *(Théorème 11.5 du cours 11 [7]) et $e^0 = 1$ (Théorème 6.1 (iv) du cours 6 [5]),*

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x &= [F(x)]_0^\pi \\ &= F(\pi) - F(0) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\pi}(\sin(\pi) - \cos(\pi)) - \left(\frac{1}{2}e^0(\sin(0) - \cos(0))\right) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1). \end{aligned}$$

3. *On a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ (Théorème 11.1 (iii) du cours 11 [7]), donc $|\cos(x)| \leq 1$. Comme $e^{-x} > 0$ (Théorème 6.1 (i) du cours 6 [5]),*

$$|f(x)| = e^{-x}\,|\cos(x)| \leq e^{-x}.$$

4. *La fonction $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}$, car $|f(x)| = \sqrt{f(x)^2}$, et f, $y \mapsto y^2$ et $\sqrt{\cdot}$ sont continues (Théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3 du cours 3 [2]). La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (question 2), et une primitive de e^{-x} sur $\mathbb{R}$ est $-e^{-x}$ (colonne 4 du Corollaire 9.2 du cours 9 [6], avec -1 et 0 pour ses réels a et b). Comme $0 < a$, la comparaison des intégrales (Théorème 9.7 (iv) du cours 9 [6]), appliquée à l'inégalité de la question 3, donne :*

$$\begin{aligned} \int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x &\leq \int_0^a e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-e^{-x}\right]_0^a \\ &= 1 - e^{-a}. \end{aligned}$$

Comme $e^{-a} > 0$ (Théorème 6.1 (i) du cours 6 [5]), on a $1 - e^{-a} < 1$, et donc

$$\int_0^a |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq 1.$$

5. *Pour calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x$, on utilise la primitive F (Définition 9.2 du cours 9 [6]) :*

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x &= [F(x)]_0^a \\ &= F(a) - F(0) \\ &= \frac{1}{2} e^{-a}(\sin(a) - \cos(a)) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme $-1 \leq \sin(a) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(a) \leq 1$ (Théorème 11.1 (iii) du cours 11 [7]), on a

$$-2 \leq \sin(a) - \cos(a) \leq 2,$$

d'où, comme $e^{-a} > 0$,

$$-e^{-a} \leq \frac{1}{2} e^{-a}(\sin(a) - \cos(a)) \leq e^{-a}.$$

On a $\lim_{a \to +\infty}(-a) = -\infty$ (Théorèmes 2.1 et 2.2 du cours 2), donc $\lim_{a \to +\infty} e^{-a} = 0$ (Théorèmes 6.8 du cours 6 [5] et 2.4 du cours 2), donc $\lim_{a \to +\infty} (-e^{-a}) = 0$ (Théorème 2.2 du cours 2 [1]). Le théorème des gendarmes (Théorème 2.5 (i) du cours 2 [1]) donne

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2} e^{-a}(\sin(a) - \cos(a)) = 0.$$

Donc, par le Théorème 2.2 du cours 2 [1],

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Problème 2 *Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 3]$ par*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

1. *Calculer $F(x)$, une primitive de $f(x)$ sur $[0, 3]$.*
2. *Calculer l'intégrale de f sur l'intervalle $[0, 3]$.*
3. *Interpréter géométriquement l'intégrale calculée.*
4. *Trouver les points où $f(x)$ atteint ses valeurs extrêmes sur $[0, 3]$ et déterminer la nature de ces extrêmes.*

Solution 2 *1. Par les Théorèmes 9.2 et 9.3 du cours 9, on obtient une primitive de* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ *terme par terme, et par le Théorème 9.1 du cours 9 [6] ses primitives sur* $[0, 3]$ *sont*

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 4x + C,$$

où C *est une constante d'intégration.*

2. La fonction f *est un polynôme, continu sur* $[0, 3]$ *(Théorème 3.1 (i) du cours 3 [2]). Par la Définition 9.2 du cours 9 [6], l'intégrale de* f *sur* $[0, 3]$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^3 - 3x^2 + 4)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_0^3 = \left(\frac{81}{4} - 27 + 12\right) - (0) \\ &= \frac{81}{4} - 15 = \frac{21}{4}.\end{aligned}$$

3. On développe $(x-2)^2(x+1) = (x^2-4x+4)(x+1) = x^3-3x^2+4$ *:* $f(x) = (x-2)^2(x+1) \geq 0$ *pour* $x \in [0, 3]$*, car* $(x-2)^2 \geq 0$ *et* $x+1 > 0$*. Comme* f *est continue sur* $[0, 3]$ *(question 2), le Théorème 9.9 du cours 9 [6] montre que l'intégrale calculée est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe de* f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 3$*.*

4. Pour trouver les points extrêmes, on calcule la dérivée de $f(x)$ *(Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [3]) :*

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x\,(x - 2)\,.$$

En résolvant $f'(x) = 0$*, on trouve* $x = 0$ *ou* $x = 2$ *;* $f'(x) < 0$ *pour* $0 < x < 2$*, car* $3x > 0$ *et* $x - 2 < 0$*, et* $f'(x) > 0$ *pour* $2 < x \leq 3$*, car* $3x > 0$ *et* $x - 2 > 0$*. En évaluant* $f(x)$*, on obtient*

$$f(0) = 4, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = 4.$$

Par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3], f *est strictement décroissante sur* $[0, 2]$ *et strictement croissante sur* $[2, 3]$ *; le tableau de variation de* f *est*

x	0		2		3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

.

On voit que sur l'intervalle $[0, 3]$*, la fonction* f *a un minimum, égal à* 0*, en* $x = 2$*, et un maximum, égal à* 4*, atteint en* $x = 0$ *et en* $x = 3$*.*

Problème 3 *Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[1, e^2]$ par*

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. *Montrer que f est dérivable sur $[1, e^2]$ et calculer $f'(x)$.*
2. *Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f sur $[1, e^2]$.*
3. *En remarquant que $f(x) = \ln(x)\,(\ln(x))'$, calculer une primitive F de f sur $[1, e^2]$.*
4. *Calculer l'intégrale de f sur l'intervalle $[1, e^2]$.*
5. *Interpréter géométriquement le résultat de l'intégrale.*

Solution 3 1. *La fonction $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[1, e^2]$ (Théorème 4.2 du cours 4 [3]) ; le dénominateur x ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc f est dérivable sur cet intervalle (Théorème 4.3 (iii) du cours 4 [3]), et sa dérivée se calcule comme suit :*

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

2. *Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ est celui de $1 - \ln(x)$. Comme $\ln(e) = 1$ (Définition 5.2 du cours 5), on a $1-\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(e) \Leftrightarrow x < e$, et $1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ (Théorème 5.1 (ii) du cours 5 [4]). De plus, $f(1) = 0$ (Définition 5.1 du cours 5), $f(e) = \frac{1}{e}$ et $f(e^2) = \frac{\ln(e^2)}{e^2} = \frac{2}{e^2}$ (Théorème 5.2 (iii) du cours 5 [4]). Comme $\ln(1) = 0 < \ln(e) = 1 < \ln(e^2) = 2$, on a $1 < e < e^2$ (Théorème 5.1 (ii) du cours 5 [4]). Par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3], le tableau de variation est donc le suivant :*

x	1		e		e^2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{2}{e^2}$

3. *Avec $u = \ln$, dérivable sur $[1, e^2]$ de dérivée $u'(x) = \frac{1}{x}$ (Théorème 4.2 du cours 4 [3]), on a $f = u\,u'$. Par le Corollaire 9.2 du cours 9 (avec $n = 1$), une primitive de f est $\frac{u^2}{2}$, et les primitives de f sur $[1, e^2]$ sont (Théorème 9.1 du cours 9 [6])*

$$F(x) = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C,$$

où C est une constante d'intégration.

4. *La fonction f est continue sur $[1, e^2]$ (Théorèmes 3.1 et 3.2 (ii) du cours 3 [2]). Par la Définition 9.2 du cours 9 [6], avec $\ln(e^2) = 2$ et*

$\ln(1) = 0$ *(Théorème 5.2 (iii) et Définition 5.1 du cours 5 [4]), l'intégrale de* f *sur* $[1, e^2]$ *est :*

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^{e^2} = \frac{(\ln(e^2))^2}{2} - \frac{(\ln(1))^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2.$$

5. *Pour* $x \in [1, e^2]$, $\ln(x) \geq 0$ *(Théorème 5.1 (iii) du cours 5 [4]) et* $x > 0$, *donc* $f(x) \geq 0$. *Comme* f *est continue sur* $[1, e^2]$ *(question 4), le Théorème 9.9 du cours 9 [6] montre que cette intégrale est l'aire, égale à* 2 *unités d'aire, du domaine limité par la courbe de* $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x = 1$ *et* $x = e^2$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray. Cours 9. Primitive et intégrale, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[7] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.