Problèmes type Bac & Solutions : Variable aléatoire

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 10.1 du cours 10* désigne un énoncé numéroté du cours 10 [2], et un renvoi comme *Définition 7.1 du cours 7*, un énoncé numéroté du cours sur les probabilités [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *Dans un jeu de loterie, un joueur tire au hasard une carte d'un jeu standard de 52 cartes. Si le joueur tire un as, il gagne 20 euros ; pour un roi, il gagne 15 euros ; pour une dame, il gagne 10 euros ; et pour un valet, il gagne 5 euros. Pour toute autre carte, il ne gagne rien. Soit X la variable aléatoire représentant le gain du joueur.*

1. *Déterminer la loi de probabilité de X.*
2. *Calculer l'espérance de X.*
3. *Calculer la variance et l'écart-type de X.*
4. *Le joueur joue 50 fois ; la carte est remise dans le jeu après chaque tirage, et les tirages sont indépendants. Calculer l'espérance du gain total, puis interpréter ce résultat à l'aide de la loi des grands nombres.*

Solution 1 1. *L'univers Ω est l'ensemble des 52 cartes, muni de la probabilité uniforme, car la carte est tirée au hasard (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). Les valeurs de X sont 0, 5, 10, 15 et 20. Le jeu contient 4 as, 4 rois, 4 dames et 4 valets ; on en déduit, par le Théorème 7.2 du cours 7 [1], la loi de X :*

- $\mathbf{P}(X = 20) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, *car il y a 4 as ;*
- $\mathbf{P}(X = 15) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, *car il y a 4 rois ;*
- $\mathbf{P}(X = 10) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, *car il y a 4 dames ;*
- $\mathbf{P}(X = 5) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, *car il y a 4 valets ;*
- $\mathbf{P}(X = 0) = \frac{52-16}{52} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$, *pour les 36 autres cartes.*

On vérifie que la somme de ces probabilités vaut $\frac{4+9}{13} = 1$ *(Théorème 10.1 du cours 10 [2]).*

2. *Par la Définition 10.3 du cours 10 [2], l'espérance de* X *est*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 20 \times \frac{1}{13} + 15 \times \frac{1}{13} + 10 \times \frac{1}{13} + 5 \times \frac{1}{13} + 0 \times \frac{9}{13} \\ &= \frac{50}{13} \approx 3{,}85 \text{ euros.}\end{aligned}$$

3. *Par le Théorème 10.4 du cours 10 [2],*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= 20^2 \times \frac{1}{13} + 15^2 \times \frac{1}{13} + 10^2 \times \frac{1}{13} + 5^2 \times \frac{1}{13} + 0^2 \times \frac{9}{13} \\ &= \frac{400 + 225 + 100 + 25}{13} = \frac{750}{13} \approx 57{,}69.\end{aligned}$$

Par la formule de König-Huygens (Théorème 10.5 du cours 10 [2]),

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{750}{13} - \left(\frac{50}{13}\right)^2 = \frac{9750 - 2500}{169} = \frac{7250}{169} \approx 42{,}90.$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance (Définition 10.4 du cours 10 [2]) :

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{7250}{169}} = \frac{\sqrt{7250}}{13} \approx 6{,}55 \text{ euros.}$$

4. *Pour* $i = 1, \ldots, 50$*, soit* X_i *le gain de la* i*-ème partie. Chaque tirage se fait au hasard dans le jeu complet, donc, comme à la question 1, chaque* X_i *a la même loi que* X*, et* $\mathbf{E}[X_i] = \frac{50}{13}$*. Le gain total est* $G = X_1 + \cdots + X_{50}$ *; par la linéarité de l'espérance (Théorème 10.3 (i) du cours 10 [2]),*

$$\mathbf{E}[G] = 50 \times \frac{50}{13} = \frac{2500}{13} \approx 192{,}31 \text{ euros.}$$

Interprétation : les tirages étant indépendants, les X_i *le sont (Remarque 10.1 du cours 10 [2]), et le gain moyen par partie est* $M_{50} = \frac{G}{50}$*. Par la loi des grands nombres (Théorème 10.15 du cours 10 [2]), pour tout* $t > 0$*, la probabilité que le gain moyen sur* n *parties s'écarte de* $\frac{50}{13}$ *d'au moins* t *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$*. La loi ne garantit pas un gain total voisin de* 192 *euros sur 50 parties ; pour* $n = 50$*, l'inégalité de concentration (Théorème 10.14 du cours 10 [2]) donne seulement*

$$\mathbf{P}\left(\left|M_{50} - \frac{50}{13}\right| \geq t\right) \leq \frac{7250/169}{50\,t^2} = \frac{145}{169\,t^2},$$

majoration qui n'est inférieure à 1 *que pour* $t > \frac{\sqrt{145}}{13} \approx 0{,}93$ *euro.*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 10. Variable aléatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.