Problèmes type Bac & Solutions : Fonctions trigonométriques

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 11.1 du cours 11* désigne un énoncé numéroté du cours 11 [3], et un renvoi comme *Théorème 4.5 du cours 4*, un énoncé numéroté d'un autre cours : sur la dérivation [1] ou sur les primitives et les intégrales [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x).$$

1. *Montrer que la fonction f est périodique et préciser sa période. En déduire qu'il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.*
2. *Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ et $f'(x) = \sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.*
3. *Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation $f(x) = 1$.*
4. *On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.*
5. *Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.*

Solution 1

1. *Pour tout réel x, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ (Théorème 11.1 (i) du cours 11 [3]), donc $f(x+2\pi) = f(x)$: la fonction f est périodique de période 2π. Sa courbe se répète sur chaque intervalle de longueur 2π ; il suffit donc de l'étudier sur $[0, 2\pi]$.*
2. *Par le Théorème 11.12 du cours 11 et le Théorème 11.5 du cours 11 [3], pour tout réel x,*

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin(x)+\cos(x)\right) = f(x).\end{aligned}$$

Par le Corollaire 11.1 du cours 11 et le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [1], f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$; on retrouve d'ailleurs $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$ par le Théorème 11.6 (ii) du cours 11 [3].

Pour $x \in [0, 2\pi]$, posons $y = x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$. Par le Théorème 11.4 (ii) du cours 11 [3], et par la période 2π pour $y > \frac{3\pi}{2}$ (car alors $y - 2\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$), on a $\cos(y) > 0$ pour $\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{\pi}{2}$ et pour $\frac{3\pi}{2} < y \leq \frac{9\pi}{4}$, et $\cos(y) < 0$ pour $\frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2}$. Ainsi $f'(x) > 0$ sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ et sur $]\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$, $f'(x) < 0$ sur $]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$, et f' s'annule en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$. Avec $f(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$, $f(\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{2}) = -\sqrt{2}$ (Théorème 11.2 (i) du cours 11 [3]), et $f(2\pi) = f(0) = 1$ (question 1), et comme f est continue, car dérivable (Théorème 4.1 du cours 4), le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [1] donne :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

Ainsi f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, et strictement croissante sur $[\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$.

3. *Par la question 2 et le Théorème 11.5 du cours 11 [3],*

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Par le Théorème 11.9 (ii) du cours 11 [3], cela équivaut à l'existence d'un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, c'est-à-dire $x = 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Dans $[0, 2\pi]$, on obtient $x = 0$ et $x = 2\pi$ (pour $k = 0$ et $k = 1$) et $x = \frac{\pi}{2}$ (pour $k = 0$). Donc l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}.$$

4. *Par la Définition 4.3 du cours 4 [1], l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ est*

$$y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Par la question 2, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ (Théorème 11.5 du cours 11 [3]) et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Donc une équation de la tangente est $y = \sqrt{2}$.

5. *Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq 0$ et $\cos(x) \geq 0$ (Théorème 11.4 du cours 11, avec $\sin(0) = 0$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$), donc $f \geq 0$; de plus f est continue (Théorème 11.6 (i) du cours 11 [3]). Par le Théorème 9.9 du cours 9 [2], l'aire cherchée, en unités d'aire, est*

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) + \cos(x))\,\mathrm{d}x.$$

La fonction $F(x) = -\cos(x) + \sin(x)$ *est une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$ *(Théorèmes 9.2 et 9.3 du cours 9), donc, par la Définition 9.2 du cours 9 [2],*

$$A = [-\cos(x) + \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = (0+1) - (-1+0) = 2.$$

Problème 2 *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).$$

1. *Montrer que, pour tout réel* x, $f(x) = \sin(3x)$, *en écrivant* $3x = 2x + x$.
2. *Déterminer les zéros de la fonction* f *sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$.
3. *Étudier les variations de* f *sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$.
4. *Calculer l'intégrale de* f *sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$.

Solution 2 *1. Soit* x *un réel. Par le Théorème 11.12 du cours 11, puis le Corollaire 11.3 du cours 11 [3],*

$$\begin{aligned}\sin(3x) = \sin(2x+x) &= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)\\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \big(1 - 2\sin^2(x)\big)\sin(x).\end{aligned}$$

Comme $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ *(Théorème 11.1 (ii) du cours 11 [3]),*

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)\\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x) = f(x).\end{aligned}$$

2. *Par la question 1, on a* $f(x) = 0$ *si et seulement si* $\sin(3x) = \sin(0)$, *c'est-à-dire, par le Théorème 11.9 (ii) du cours 11 [3], s'il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $3x = 2k\pi$ *ou* $3x = \pi + 2k\pi$, *c'est-à-dire* $3x = m\pi$ *avec* $m \in \mathbb{Z}$, *soit* $x = \frac{m\pi}{3}$. *Sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$, *il faut* $0 \le m \le 6$ *: les zéros sont*

$$x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}.$$

3. *Par la question 1 et le Corollaire 11.1 du cours 11 [3],* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$f'(x) = 3\cos(3x).$$

On a $\cos(3x) = 0$ *si et seulement si* $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *(lecture de la Définition 11.4 du cours 11 [3]), soit* $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$. *Dans* $[0, 2\pi]$, *il faut* $0 \le k \le 5$, *ce qui donne les points*

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}.$$

Pour $x \in [0, 2\pi]$, $y = 3x \in [0, 6\pi]$. *Par le Théorème 11.4 (ii) du cours 11 et la période* 2π *(Théorème 11.1 (i) du cours 11 [3]),* $\cos(y) > 0$ *sur* $[0, \frac{\pi}{2}[$,

$]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$, $]\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}[$, $]\frac{11\pi}{2}, 6\pi]$, *et* $\cos(y) < 0$ *sur* $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $]\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}[$, $]\frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}[$. *Le signe de* f' *change donc à chaque point de la liste, en commençant par* $+$. *Les valeurs de* f *en ces points sont* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ *(Théorème 11.2 (i) du cours 11 [3]), puis, par la période* 2π, *alternativement* 1 *et* -1 *;* $f(0) = f(2\pi) = 0$. *Comme* f *est continue, car dérivable (Théorème 4.1 du cours 4), le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [1] donne alors :*

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

La fonction f *atteint donc son maximum* 1 *en* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, *et son minimum* -1 *en* $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$.

4. *La fonction* $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$ *a pour dérivée* $F'(x) = -\frac{1}{3}(-3\sin(3x)) = \sin(3x)$ *(Corollaire 11.1 du cours 11 [3] et Théorème 4.3 (i) du cours 4 [1]) : c'est une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$ *(Définition 9.1 du cours 9 [2]). La fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$, *car dérivable (question 3 et Théorème 4.1 du cours 4 [1]). Par la Définition 9.2 du cours 9 [2], et comme* $\cos(6\pi) = \cos(0) = 1$ *(Théorème 11.1 (i) du cours 11 [3]),*

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{3}(\cos(6\pi) - \cos(0)) = 0.$$

Comme $\sin(3(x + \frac{2\pi}{3})) = \sin(3x + 2\pi) = \sin(3x)$ *(Théorème 11.1 (i) du cours 11 [3]), la fonction* $\sin(3x)$ *est de période* $\frac{2\pi}{3}$ *; sur* $[0, 2\pi]$, *elle parcourt exactement trois périodes, sur lesquelles les parties positives et négatives se compensent.*

Problème 3 *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x).$$

1. *Montrer que la fonction* f *peut s'écrire sous la forme* $f(x) = R\cos(x - \phi)$, *où* $R > 0$ *et* $\phi \in [0, 2\pi[$.

2. *Calculer* R *et* ϕ.

3. *Étudier les variations de la fonction* f *sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$.

4. *Déterminer les valeurs de* x *de* $[0, 2\pi]$ *pour lesquelles* f *atteint son maximum et son minimum sur* $[0, 2\pi]$.

Solution 3 1. *Posons* $a = 1$ *et* $b = \sqrt{3}$, *de sorte que* $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$. *Pour* $R > 0$ *et* ϕ *réels, le Théorème 11.12 du cours 11 [3] donne, pour tout réel* x,

$$R\cos(x - \phi) = R\cos(\phi)\cos(x) + R\sin(\phi)\sin(x).$$

Il suffit donc de trouver $R > 0$ et ϕ tels que $R\cos(\phi) = a$ et $R\sin(\phi) = b$. Soit $R = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. Comme $\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \left(\frac{b}{R}\right)^2 = 1$, le point $\left(\frac{a}{R}, \frac{b}{R}\right)$ est sur le cercle trigonométrique ; par la Définition 11.2 (i) du cours 11, c'est le point $M(\phi)$ associé à un unique réel $\phi \in [0, 2\pi[$, et alors $\cos(\phi) = \frac{a}{R}$ et $\sin(\phi) = \frac{b}{R}$ (Définition 11.3 du cours 11 [3]).

2. *Avec $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$:*

$$R = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2, \qquad \cos(\phi) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par le Théorème 11.5 du cours 11, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $M(\phi) = M(\frac{\pi}{3})$, et, comme ϕ et $\frac{\pi}{3}$ sont dans $[0, 2\pi[$, l'unicité de la Définition 11.2 (i) du cours 11 [3] donne $\phi = \frac{\pi}{3}$. Donc, pour tout réel x,

$$f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

3. *Par le Corollaire 11.1 du cours 11 [3] et le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [1], f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$f'(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Par le Théorème 11.9 (ii) du cours 11 [3], avec $\alpha = 0$, $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = 0$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$, c'est-à-dire $x - \frac{\pi}{3} = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Pour $x \in [0, 2\pi]$, $x - \frac{\pi}{3} = m\pi$ est dans $[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$, donc $m = 0$ ou $m = 1$: cela donne $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$.

Pour $x \in [0, 2\pi]$, $y = x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$. Par le Théorème 11.4 (i) du cours 11, $\sin(y) > 0$ pour $0 < y < \pi$ et $\sin(y) < 0$ pour $\pi < y \leq \frac{5\pi}{3}$; pour $-\frac{\pi}{3} \leq y < 0$, $\sin(y) = -\sin(-y) < 0$ (Théorème 11.3 du cours 11 [3]). Donc $f'(x) > 0$ sur $[0, \frac{\pi}{3}[$ et sur $]\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$, et $f'(x) < 0$ sur $]\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$. Avec $f(0) = 1 + 0 = 1$, $f(\frac{\pi}{3}) = 2$, $f(\frac{4\pi}{3}) = 2\cos(\pi) = -2$ et $f(2\pi) = 1$ (Théorème 11.1 (i) du cours 11 [3]), et comme f est continue, car dérivable (Théorème 4.1 du cours 4), le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [1] donne le tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

4. *Par le tableau, sur $[0, 2\pi]$, f atteint son maximum 2 en $x = \frac{\pi}{3}$ et son minimum -2 en $x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$.*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 9. Primitive et intégrale, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.