Problèmes type Bac & Solutions : Équations différentielles

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 13.4 du cours 13* désigne un énoncé numéroté du cours 13 [4], et un renvoi comme *Théorème 6.6 du cours 6*, un énoncé numéroté d'un autre cours : sur la dérivation [1], sur la fonction exponentielle [2] ou sur les fonctions trigonométriques [3]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$y' + y = x^2 + 2, \tag{E}$$

où y est une fonction de la variable réelle x et y' désigne sa dérivée.

1. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle homogène associée à (E).*
2. *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E).*

   Indication : *essayer une solution particulière de la forme $y_{\mathrm{p}}(x) = Ax^2 + Bx + C$, où A, B et C sont des réels.*
3. *En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).*
4. *Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$.*

Solution 1

1. *L'équation différentielle homogène associée à (E) (Théorème 13.4 du cours 13 [4]) est $y' + y = 0$, c'est-à-dire $y' = -y$. C'est l'équation $y' = ay$ avec $a = -1$; par le Théorème 13.2 du cours 13 [4], ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions*

$$y_{\mathrm{h}}(x) = ke^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. *Comme le second membre x^2+2 est un polynôme de degré 2, on cherche y_{p} de la même forme (Remarque 13.6 du cours 13 [4]) : $y_{\mathrm{p}}(x) = Ax^2+Bx+C$, avec A, B et C réels. Cette fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $y'_{\mathrm{p}}(x) = 2Ax + B$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [1]). Pour tout réel x,*

$$y'_{\mathrm{p}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) = Ax^2 + (2A + B)x + (B + C).$$

Il suffit donc que $A = 1$, $2A + B = 0$ et $B + C = 2$, soit $A = 1$, $B = -2$ et $C = 4$. Vérification : pour $y_p(x) = x^2 - 2x + 4$, on a $y_p'(x) = 2x - 2$, et

$$y_p'(x) + y_p(x) = 2x - 2 + x^2 - 2x + 4 = x^2 + 2$$

pour tout réel x. Donc $y_p(x) = x^2 - 2x + 4$ définit une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. *L'équation (E) s'écrit $y' = -y + (x^2 + 2)$: c'est l'équation $y' = ay + g$ du Théorème 13.4 du cours 13 [4], avec $a = -1$, $g(x) = x^2 + 2$ et $I = \mathbb{R}$. Par ce théorème et les questions 1 et 2, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont exactement les fonctions*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + x^2 - 2x + 4, \quad k \in \mathbb{R}.$$

4. *Par la question 3, une solution de (E) s'écrit $y(x) = ke^{-x} + x^2 - 2x + 4$, avec k réel, et $y(0) = k + 4$, car $e^0 = 1$ (Théorème 6.1 (iv) du cours 6 [2]). La condition $y(0) = 1$ s'écrit*

$$1 = k + 4,$$

ce qui donne $k = -3$. Par le Corollaire 13.3 du cours 13 [4], il y a une seule solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$: c'est

$$y(x) = -3e^{-x} + x^2 - 2x + 4.$$

Problème 2 *Considérons l'équation différentielle*

$$y' + 2y = e^{-x}. \tag{E2}$$

1. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée.*

2. *Montrer que la fonction y_p définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation (E2).*

3. *En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E2).*

4. *Trouver la solution de l'équation (E2) qui vérifie $y(0) = 2$.*

Solution 2 1. *L'équation homogène associée à (E2) (Théorème 13.4 du cours 13 [4]) est $y' + 2y = 0$, ou encore $y' = -2y$. Par le Théorème 13.2 du cours 13 [4], avec $a = -2$, ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions*

$$y_h(x) = ke^{-2x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. *Par le Théorème 6.6 du cours 6 [2], avec $u(x) = -x$, la fonction y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $y_p'(x) = -e^{-x}$. Pour tout réel x,*

$$y_p'(x) + 2y_p(x) = -e^{-x} + 2e^{-x} = e^{-x}.$$

Donc y_p est bien une solution de (E2) sur $\mathbb{R}$: c'est une solution particulière de (E2), au sens du Théorème 13.4 du cours 13 [4].

3. *L'équation (E2) s'écrit* $y' = -2y + e^{-x}$ *: c'est l'équation du Théorème 13.4 du cours 13 [4], avec* $a = -2$, $g(x) = e^{-x}$ *et* $I = \mathbb{R}$. *Par ce théorème et les questions 1 et 2, les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de (E2) sont exactement les fonctions*

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) = ke^{-2x} + e^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

4. *Par la question 3, une solution de (E2) s'écrit* $y(x) = ke^{-2x} + e^{-x}$, *avec* k *réel. Comme* $e^0 = 1$ *(Théorème 6.1 (iv) du cours 6 [2]), la condition* $y(0) = 2$ *s'écrit*

$$2 = ke^0 + e^0 = k + 1.$$

On en déduit que $k = 1$. *Par le Corollaire 13.3 du cours 13 [4], la solution qui vérifie* $y(0) = 2$ *existe et est unique : c'est*

$$y(x) = e^{-2x} + e^{-x}.$$

Problème 3 *Une masse accrochée à un ressort oscille sans frottement autour de sa position d'équilibre. On note* $f(t)$ *sa position, en centimètres, à l'instant* t, *en secondes ; la position d'équilibre correspond à* $f(t) = 0$. *On admet que* f *est une solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle*

$$y'' + 4y = 0, \tag{E3}$$

où y *est une fonction de la variable réelle* t, *et que* $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = -2\sqrt{3}$.

1. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation (E3).*
2. *En déduire que, pour tout réel* t, $f(t) = \cos(2t) - \sqrt{3}\sin(2t)$.
3. *Montrer que, pour tout réel* t, $f(t) = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.
4. *Montrer que la fonction* f *est périodique de période* π.
5. *Montrer que, pour tout réel* t, $-2 \leq f(t) \leq 2$. *Déterminer le premier instant* $t > 0$ *où la position est maximale.*
6. *Résoudre dans l'intervalle* $[0, \pi]$ *l'équation* $f(t) = 0$, *et interpréter le résultat.*
7. *Montrer que, pour tout réel* t, $(f'(t))^2 + 4\,(f(t))^2 = 16$.

Solution 3 1. *C'est l'équation* $y'' + \omega^2 y = 0$ *avec* $\omega = 2 > 0$. *Par le Théorème 13.5 (i) du cours 13 [4], ses solutions sur* $\mathbb{R}$ *sont exactement les fonctions*

$$t \mapsto \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. *Par la question 1, il existe deux réels α et β tels que $f(t) = \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)$ pour tout réel t. Par le Corollaire 11.1 du cours 11 [3] et le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [1],*

$$f'(t) = -2\alpha\sin(2t) + 2\beta\cos(2t).$$

Comme $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$ (Théorème 11.5 du cours 11 [3]), on a $f(0) = \alpha$ et $f'(0) = 2\beta$. Les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2\sqrt{3}$ donnent $\alpha = 1$ et $\beta = -\sqrt{3}$, donc, pour tout réel t,

$$f(t) = \cos(2t) - \sqrt{3}\sin(2t).$$

On retrouve la formule du Théorème 13.5 (ii) du cours 13 [4], avec $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $y_1 = -2\sqrt{3}$: f est la seule solution de (E3) qui vérifie ces deux conditions.

3. *Soit t un réel. Par le Théorème 11.12 du cours 11, puis le Théorème 11.5 du cours 11 [3],*

$$\begin{aligned} 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\left(\cos(2t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(2t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\cos(2t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t)\right) \\ &= \cos(2t) - \sqrt{3}\sin(2t) = f(t). \end{aligned}$$

C'est l'écriture $A\cos(\omega t + \varphi)$ du Corollaire 13.4 du cours 13, avec $A = 2$ et $\varphi = \frac{\pi}{3}$: on trouve ces valeurs par $A = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, comme dans l'Exemple 13.7 du cours 13 [4]. L'amplitude du mouvement est de 2 centimètres.

4. *Soit t un réel. Par la question 3 et le Théorème 11.1 (i) du cours 11 [3],*

$$f(t + \pi) = 2\cos\left(2t + 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = f(t).$$

La fonction f est donc périodique de période $\pi = \frac{2\pi}{\omega}$: c'est la période de l'oscillation (Remarque 13.7 du cours 13 [4]), en secondes.

5. *Par le Théorème 11.1 (iii) du cours 11 [3], $-1 \leq \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, donc $-2 \leq f(t) \leq 2$ pour tout réel t. Comme la valeur 2 est atteinte (ci-dessous), la position est maximale lorsque $f(t) = 2$, c'est-à-dire lorsque $\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = 1 = \cos 0$. Par le Théorème 11.9 (i) du cours 11 [3], avec $\alpha = 0$, cela équivaut à l'existence d'un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2t + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$, c'est-à-dire*

$$t = -\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Ce réel est strictement positif si et seulement si $k \geq 1$, et le plus petit est obtenu pour $k = 1$. Le premier instant $t > 0$ où la position est maximale est donc $t = \frac{5\pi}{6}$ secondes (environ 2,62 secondes) ; la masse est alors à 2 centimètres de sa position d'équilibre.

6. *Par la question 3 et le Théorème 11.5 du cours 11 [3],*

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Par le Théorème 11.9 (i) du cours 11 [3], cela équivaut à l'existence d'un $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $2t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *ou* $2t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$*, c'est-à-dire*

$$t = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad ou \quad t = -\frac{5\pi}{12} + k\pi.$$

Dans $[0, \pi]$*, la première famille donne* $t = \frac{\pi}{12}$ *(pour* $k = 0$*), et la seconde* $t = \frac{7\pi}{12}$ *(pour* $k = 1$*) ; les autres valeurs de* k *donnent des réels hors de* $[0, \pi]$*. Donc l'ensemble des solutions est*

$$S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}.$$

Pendant la première période, la masse passe par sa position d'équilibre aux instants $\frac{\pi}{12}$ *et* $\frac{7\pi}{12}$ *secondes.*

7. *Par la question 3, le Corollaire 11.1 du cours 11 [3] et le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [1],* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et*

$$f'(t) = -4\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Par le Théorème 11.1 (ii) du cours 11 [3], pour tout réel t*,*

$$\left(f'(t)\right)^2 + 4\left(f(t)\right)^2 = 16\left(\sin^2\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 16.$$

C'est la quantité $E = (\omega f)^2 + (f')^2$ *de la preuve du Théorème 13.5 du cours 13 [4] (étape 3), avec* $\omega = 2$ *: elle reste constante, et pour un ressort elle est proportionnelle à l'énergie mécanique, qui se conserve.*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 13. Équations différentielles, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.