Problèmes type Bac & Solutions : Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 14.11 du cours 14* désigne un énoncé numéroté du cours 14 [1], sur les vecteurs et la géométrie dans le plan et l'espace. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ce cours est disponible sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *L'espace est muni d'un repère orthonormé* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. *On note* $\mathcal{P}$ *le plan passant par* O *de vecteurs directeurs* $\vec{i}$, $\vec{j}$. *On considère les vecteurs* $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ *et* $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$, *et les points* $A(2, -1, 3)$ *et* $B(1, 2, -1)$.

Partie A

1. *Représenter, dans le plan* $\mathcal{P}$, *les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *avec l'origine* O.
2. *Montrer que les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires.*
3. *Déterminer un vecteur directeur* $\vec{w}$ *de la droite* (AB).
4. *Calculer la distance* AB.

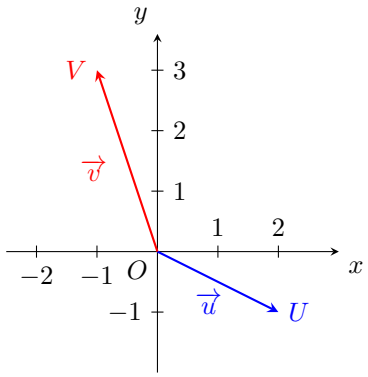
Partie B

1. *Déterminer les coordonnées du point* C *tel que* $\overrightarrow{OC} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$.
2. *Soit* $\mathcal{D}$ *la droite passant par* A *de vecteur directeur* $\vec{u}$. *Donner une représentation paramétrique de* $\mathcal{D}$.
3. *En éliminant le paramètre, décrire* $\mathcal{D}$ *par un système de deux équations en* x, y, z. *Le point* C *appartient-il à* $\mathcal{D}$ *?*
4. *Montrer que les points* O, A, B *ne sont pas alignés, puis que les points* O, A, B, C *ne sont pas coplanaires. En déduire que* $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ *est une base de l'espace.*

Solution 1 ***Partie A***

1. *On a* $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + (-1)\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$ *et* $\overrightarrow{v} = (-1)\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$ *: les coordonnées de* $\overrightarrow{u}$ *et de* $\overrightarrow{v}$ *sont* $(2, -1, 0)$ *et* $(-1, 3, 0)$ *(Théorème 14.15 (i) du cours 14 [1]). Soient* U *et* V *les points tels que* $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{v}$ *(Théorème 14.1 (i) du cours 14 [1]) :* $U(2, -1, 0)$ *et* $V(-1, 3, 0)$*. La famille* $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *est libre : si* $s\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$*, alors* $s\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$*, d'où* $s = t = 0$*, car la base* $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ *est une famille libre (Définition 14.11 du cours 14 [1]). Comme* $\overrightarrow{OU} = 2\overrightarrow{i} + (-1)\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{OV} = (-1)\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$*, les points* U *et* V *appartiennent au plan* $\mathcal{P}$ *(Définition 14.7 du cours 14 [1]).*

   Dans $\mathcal{P}$*, on trace deux axes issus de* O*, dirigés par* $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{j}$ *; ils sont perpendiculaires et gradués avec la même unité, car le repère est orthonormé (Définition 14.12 du cours 14 [1]). On place* U *et* V*, puis on trace les flèches de* O *à* U *et de* O *à* V *:*



2. *Le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *n'est pas nul, car ses coordonnées ne sont pas toutes nulles (Théorème 14.15 (i) du cours 14 [1]). Par le Théorème 14.4 (ii) du cours 14,* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel* t *tel que* $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u}$*, c'est-à-dire, par le Corollaire 14.2 du cours 14 [1] et l'unicité des coordonnées, tel que*

$$-1 = 2t, \qquad 3 = -t, \qquad 0 = 0t.$$

   La première égalité donne $t = -\frac{1}{2}$*, et la deuxième* $t = -3$ *: aucun réel* t *ne convient. Donc* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *ne sont pas colinéaires : la famille* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *est libre (Définition 14.5 (i) du cours 14 [1]).*

3. *Par le Corollaire 14.2 du cours 14 [1], le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *a pour coordonnées*

$$(1 - 2,\ 2 - (-1),\ -1 - 3) = (-1, 3, -4).$$

Ce vecteur n'est pas nul, donc $A \neq B$ (Théorème 14.3 (i) du cours 14 [1]). Par le Théorème 14.5 (ii) du cours 14 [1], la droite (AB) est la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. Le vecteur

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$$

convient. Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{w}$, par exemple $-\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, est aussi un vecteur directeur de (AB) (Définition 14.6 (ii) du cours 14 [1]).

4. *Le repère est orthonormé. Par le Théorème 14.18 (ii) du cours 14 [1] et la question 3,*

$$AB = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26}.$$

Partie B

1. *Par les règles de calcul du Théorème 14.2 du cours 14 [1] (développer, puis regrouper),*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} &= 3\left(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right) - 2\left(-\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}\right) \\ &= (6+2)\overrightarrow{i} + (-3-6)\overrightarrow{j} = 8\overrightarrow{i} - 9\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

Les coordonnées de C sont celles de $\overrightarrow{OC}$ (Théorème 14.15 (i) du cours 14 [1]) : $C(8, -9, 0)$.

2. *Le vecteur $\overrightarrow{u}(2, -1, 0)$ n'est pas nul (Partie A, question 2). Par le Théorème 14.16 (i) du cours 14 [1], avec $A(2, -1, 3)$, un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $x = 2 + 2t$, $y = -1 - t$ et $z = 3 + 0t = 3$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donc*

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3. *On procède comme dans l'Exemple 14.10 du cours 14 [1]. La deuxième coordonnée de $\overrightarrow{u}$, -1, n'est pas nulle : on exprime t à l'aide de y.*

   Si $M(x, y, z) \in \mathcal{D}$, il existe un réel t comme à la question 2. L'égalité $y = -1 - t$ donne $t = -1 - y$, puis $x = 2 + 2(-1 - y) = -2y$, soit $x + 2y = 0$; et $z = 3$.

   Inversement, si $x + 2y = 0$ et $z = 3$, le réel $t = -1 - y$ vérifie $y = -1 - t$, $x = -2y = 2 + 2t$ et $z = 3$: $M \in \mathcal{D}$ par la question 2.

   Donc $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 3. \end{cases}$$

Une droite de l'espace n'a pas une seule équation : chacune des deux équations de ce système décrit un plan, et $\mathcal{D}$ est l'intersection de ces deux plans (Remarque 14.5 du cours 14 [1]) ; d'autres systèmes décrivent la même droite.

Le point $C(8,-9,0)$ a pour troisième coordonnée $0 \neq 3$: il ne vérifie pas le système, donc $C \notin \mathcal{D}$.

4. *Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont les coordonnées de A et de B : $\overrightarrow{OA}(2,-1,3)$ et $\overrightarrow{OB}(1,2,-1)$ (Théorème 14.15 (i) du cours 14 [1]) ; de même, $\overrightarrow{OC}(8,-9,0)$. Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ n'est pas nul. S'il existait un réel k tel que $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$, la première coordonnée donnerait $1 = 2k$, soit $k = \frac{1}{2}$, et la deuxième $2 = -k$, soit $k = -2$: c'est impossible. Donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires (Théorème 14.4 (ii) du cours 14), et les points O, A, B ne sont pas alignés (Théorème 14.6 du cours 14 [1]).*

   Par le Théorème 14.8 du cours 14, appliqué aux points O, A, B, C, dont les trois premiers ne sont pas alignés, les quatre points sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels s, t tels que $\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, c'est-à-dire, par le Corollaire 14.2 du cours 14 [1] et l'unicité des coordonnées,

$$8 = 2s + t, \qquad -9 = -s + 2t, \qquad 0 = 3s - t.$$

   La troisième égalité donne $t = 3s$, puis la première $5s = 8$: $s = \frac{8}{5}$ et $t = \frac{24}{5}$. Mais alors $-s + 2t = -\frac{8}{5} + \frac{48}{5} = 8 \neq -9$: la deuxième égalité est fausse, et le système n'a pas de solution. Les points O, A, B, C ne sont donc pas coplanaires.

   Par le même Théorème 14.8 du cours 14, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas coplanaires : la famille $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ est libre (Définition 14.5 (ii) du cours 14 [1]). C'est donc une base de l'espace (Définition 14.11 du cours 14 [1]).

Problème 2 *Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère les points $A(-1,2)$, $B(3,4)$ et $C(5,0)$.*

1. *Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.*
2. *Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, puis celles du centre I de ce parallélogramme, milieu commun de ses diagonales.*
3. *Calculer les distances AB, BC, AC et BD. En déduire que $ABCD$ est un carré.*
4. *(a) Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (AC).*

(b) *Soit E le milieu du segment $[BC]$. Donner une équation cartésienne de la droite (DE).*

5. *Montrer que les droites (AC) et (DE) sont sécantes, et déterminer les coordonnées de leur point commun G.*

6. *Montrer que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$, puis calculer la distance DG.*

Solution 2 1. *Par le Théorème 14.10 (ii) du cours 14 [1], $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3-(-1), 4-2) = (4, 2)$, et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(5-(-1), 0-2) = (6, -2)$. Or*

$$4 \times (-2) - 6 \times 2 = -8 - 12 = -20 \neq 0.$$

Par le Théorème 14.11 du cours 14, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; donc A, B, C ne sont pas alignés (Théorème 14.6 du cours 14 [1]).

2. *Soit $D(x, y)$. Par le Théorème 14.3 (iv) du cours 14 [1], $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(5 - x, -y)$ (Théorème 14.10 (ii) du cours 14), et deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées (Remarque 14.3 du cours 14 [1]) : la condition s'écrit $5 - x = 4$ et $-y = 2$, soit $x = 1$ et $y = -2$. Le seul point qui convient est donc $D(1, -2)$.*

Par le Théorème 14.10 (iii) du cours 14 [1], le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2, 1)$, et celui de $[BD]$ a pour coordonnées $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (2, 1)$. On retrouve que les diagonales ont le même milieu (Définition 14.3 du cours 14 [1]), et le centre du parallélogramme est $I(2, 1)$. Comme A, B, C ne sont pas alignés (question 1), ce parallélogramme n'est pas aplati.

3. *Le repère est orthonormé. Par le Théorème 14.10 (ii) du cours 14, $\overrightarrow{BC}(2, -4)$ et $\overrightarrow{BD}(-2, -6)$; avec $\overrightarrow{AB}(4, 2)$ et $\overrightarrow{AC}(6, -2)$ (question 1), le Théorème 14.18 (i) du cours 14 [1] donne*

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \\ BC &= \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \\ AC &= \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}, \\ BD &= \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Le parallélogramme non aplati $ABCD$ (question 2) a des diagonales de même longueur, $AC = BD$: c'est un rectangle. Ce rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur, $AB = BC$: c'est un carré (géométrie du collège).

4. (a) *Le vecteur $\overrightarrow{AC}(6, -2)$ n'est pas nul, donc $A \neq C$ (Théorème 14.3 (i) du cours 14), et la droite (AC) est la droite passant par A*

de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$ *(Théorème 14.5 (ii) du cours 14 [1]). Par le Théorème 14.12 (i) du cours 14 [1], avec* $A(-1,2)$*, une représentation paramétrique de* (AC) *est*

$$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Par le Théorème 14.12 (ii) du cours 14 [1], avec $a = 6$ *et* $b = -2$*, un point* $M(x,y)$ *appartient à* (AC) *si et seulement si* $-2(x+1) - 6(y-2) = 0$*, c'est-à-dire* $-2x - 6y + 10 = 0$*. En divisant par* -2 *(Remarque 14.4 du cours 14 [1]), une équation cartésienne de* (AC) *est*

$$x + 3y - 5 = 0.$$

Contrôle : $-1 + 3 \times 2 - 5 = 0$ *pour* A*, et* $5 + 3 \times 0 - 5 = 0$ *pour* C*.*

(b) Par le Théorème 14.10 (iii) du cours 14 [1], le milieu de $[BC]$ *est* $E\left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = E(4,2)$*. Le vecteur* $\overrightarrow{DE}$ *a pour coordonnées* $(4-1, 2-(-2)) = (3,4)$ *(Théorème 14.10 (ii) du cours 14) ; il n'est pas nul, donc* $D \neq E$*, et* (DE) *est la droite passant par* D *de vecteur directeur* $\overrightarrow{DE}$ *(Théorème 14.5 (ii) du cours 14 [1]). Par le Théorème 14.12 (ii) du cours 14 [1], avec* $D(1,-2)$*,* $a = 3$ *et* $b = 4$*, une équation cartésienne de* (DE) *est* $4(x-1) - 3(y+2) = 0$*, soit*

$$4x - 3y - 10 = 0.$$

Contrôle : $4 \times 1 - 3 \times (-2) - 10 = 0$ *pour* D*, et* $4 \times 4 - 3 \times 2 - 10 = 0$ *pour* E*.*

5. *On applique le Théorème 14.14 du cours 14 [1] aux équations* $x + 3y - 5 = 0$ *et* $4x - 3y - 10 = 0$*, avec* $\alpha = 1$*,* $\beta = 3$*,* $\gamma = -5$*,* $\alpha' = 4$*,* $\beta' = -3$*,* $\gamma' = -10$ *:*

$$\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1 \times (-3) - 4 \times 3 = -15 \neq 0.$$

Par le Théorème 14.14 (ii) du cours 14 [1], les droites (AC) *et* (DE) *sont sécantes : elles ont un point commun* G *et un seul.*

Calculons-le par substitution. La première équation donne $x = 5 - 3y$*, et la seconde devient* $4(5-3y) - 3y - 10 = 0$*, soit* $10 - 15y = 0$ *:* $y = \frac{2}{3}$*, puis* $x = 5 - 3 \times \frac{2}{3} = 3$*. Donc* $G\left(3, \frac{2}{3}\right)$*. La formule du Théorème 14.14 (ii) du cours 14 [1] donne le même résultat :*

$$x = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\delta} = \frac{3 \times (-10) - (-3) \times (-5)}{-15} = \frac{-45}{-15} = 3,$$
$$y = \frac{\alpha'\gamma - \alpha\gamma'}{\delta} = \frac{4 \times (-5) - 1 \times (-10)}{-15} = \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3}.$$

6. *Par le Théorème 14.10 du cours 14 [1],* $\overrightarrow{DG}$ *a pour coordonnées* $\left(3-1, \frac{2}{3}-(-2)\right) = \left(2, \frac{8}{3}\right)$*, et* $\frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$ *a pour coordonnées* $\left(\frac{2}{3}\times 3, \frac{2}{3}\times 4\right) = \left(2, \frac{8}{3}\right)$*. Ces vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc* $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$ *(Remarque 14.3 du cours 14 [1]).*

   Le repère étant orthonormé, le Théorème 14.18 (i) du cours 14 donne $DE = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ *et*

$$DG = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{36+64}{9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3},$$

   ce qui est bien $\frac{2}{3}DE$*, comme le donne aussi la Définition 14.2 (ii) du cours 14 [1].*

   Interprétation. *Dans le triangle* BCD*, la droite* (DE) *est la médiane issue de* D*, car* E *est le milieu de* $[BC]$*. Le point* I *est le milieu de* $[BD]$ *et de* $[AC]$ *(question 2) ; donc* $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ *(Théorème 14.3 (iii) du cours 14), et* I *appartient à* (AC) *(Définition 14.6 (i) du cours 14) ; comme* $I \neq C$*, la droite* (AC) *est la droite* (CI) *(Théorème 14.5 (ii) du cours 14 [1]), c'est-à-dire la médiane issue de* C*. Le point* G*, commun à deux médianes, est le centre de gravité du triangle* BCD*, et l'égalité* $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DE}$ *retrouve qu'il est situé aux deux tiers de la médiane issue de* D*, en partant de* D*.*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.