Problèmes type Bac & Solutions : Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 15.10 du cours 15* désigne un énoncé numéroté du cours 15 [3], sur le produit scalaire et la géométrie dans l'espace, et un renvoi comme *Théorème 14.18 du cours 14*, un énoncé numéroté d'un autre cours : sur les fonctions trigonométriques [1] ou sur les vecteurs et la géométrie dans le plan et l'espace [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *L'espace est muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. *On considère les points* $A(0,2,1)$, $B(2,1,-1)$, $C(-2,0,0)$ *et* $D(-1,3,-2)$.

Partie A : le plan (ABC)

1. *Calculer les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. *En déduire que les points* A, B, C *ne sont pas alignés.*

2. *Montrer que le vecteur* $\overrightarrow{n}(1,-2,2)$ *est normal au plan* (ABC), *puis qu'une équation cartésienne de ce plan est*

$$x - 2y + 2z + 2 = 0.$$

3. *Montrer que le point* D *n'appartient pas au plan* (ABC), *de sorte que* $ABCD$ *est un tétraèdre. Calculer la distance du point* D *au plan* (ABC).

Partie B : projeté orthogonal, aire et volume

1. *Soit* Δ *la droite passant par* D *de vecteur directeur* $\overrightarrow{n}$.
   (a) *Donner une représentation paramétrique de* Δ.
   (b) *En déduire les coordonnées du projeté orthogonal* H *du point* D *sur le plan* (ABC), *puis calculer la longueur* DH.
   (c) *Vérifier que* $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, *et en déduire que* H *est le centre de gravité du triangle* ABC.

2. *Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, ainsi que les longueurs AB et AC. Quelle est la nature du triangle ABC ?*

3. *Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et la longueur BC, puis une mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$.*

4. *Calculer l'aire du triangle ABC à l'aide du produit vectoriel, puis le volume du tétraèdre $ABCD$. On admet (géométrie du collège) que le volume d'une pyramide est $\frac{1}{3}\times\mathcal{A}\times h$, où $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur, distance du sommet au plan de la base.*

Solution 1 ***Partie A : le plan*** (ABC)

1. *Par le Corollaire 14.2 du cours 14 [2], le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2-0,1-2,-1-1)=(2,-1,-2)$, et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2-0,0-2,0-1)=(-2,-2,-1)$. Le repère est orthonormé direct. Par la Définition 15.7 du cours 15 [3], le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées*

$$\begin{aligned}(-1)\times(-1)-(-2)\times(-2)&=1-4=-3,\\(-2)\times(-2)-2\times(-1)&=4+2=6,\\2\times(-2)-(-1)\times(-2)&=-4-2=-6.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-3,6,-6)$. Ce vecteur n'est pas nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (Théorème 15.11 (iv) du cours 15 [3]), et les points A, B, C ne sont pas alignés (Théorème 14.6 du cours 14 [2]).

2. *Les points A, B, C n'étant pas alignés (question 1), le Corollaire 15.1 (ii) du cours 15 [3] dit que le vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC) : il est non nul, et orthogonal aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ de ce plan. Or $\vec{n}=-\frac{1}{3}\vec{w}$, puisque $-\frac{1}{3}(-3,6,-6)=(1,-2,2)$. Le vecteur $\vec{n}$ n'est pas nul, et il est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ (Théorème 14.17 (ii) du cours 14 [2]) : il est donc normal au plan (ABC) (Définition 15.5 du cours 15 [3]). Contrôle (Théorèmes 15.2 (ii) et 15.4 du cours 15 [3]) :*

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2+2-4=0,\qquad\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+4-2=0.$$

Le repère étant orthonormé, le Théorème 15.10 (i) du cours 15 [3], appliqué au point $A(0,2,1)$ et au vecteur normal $\vec{n}(1,-2,2)$, donne pour équation cartésienne du plan (ABC)

$$(x-0)-2(y-2)+2(z-1)=0,\quad\textit{soit}\quad x-2y+2z+2=0.$$

Contrôle : $2-2-2+2=0$ pour B, et $-2-0+0+2=0$ pour C.

3. *Pour $D(-1,3,-2)$, on a $-1-2\times3+2\times(-2)+2=-9\neq0$: le point D n'appartient pas au plan (ABC). Comme (ABC) est le seul plan qui contient A, B et C (Théorème 14.7 (ii) du cours 14 [2]), aucun plan ne*

contient les quatre points A, B, C, D : ils ne sont pas coplanaires, et $ABCD$ est un tétraèdre.

Le repère est orthonormé. Par le Théorème 15.16 (ii) du cours 15 [3], avec l'équation de la question 2,

$$d\,(D,(ABC)) = \frac{|-1-6-4+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3.$$

Partie B : projeté orthogonal, aire et volume

1. (a) *Le vecteur $\overrightarrow{n}(1,-2,2)$ n'est pas nul. Par le Théorème 14.16 (i) du cours 14 [2], avec $D(-1,3,-2)$, une représentation paramétrique de Δ est*

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 3-2t \\ z = -2+2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   (b) *Par la Définition 15.9 du cours 15 [3], la droite Δ, qui passe par D et a pour vecteur directeur le vecteur normal $\overrightarrow{n}$, coupe le plan (ABC) en un seul point, et ce point est le projeté orthogonal H de D sur (ABC). Le point de Δ de paramètre t appartient au plan (ABC) si et seulement si*

$$(-1+t)-2(3-2t)+2(-2+2t)+2=0, \quad \textit{c'est-à-dire} \quad 9t-9=0,$$

   soit $t=1$. Donc $H(0,1,0)$. Contrôle : $0-2+0+2=0$.

   Le vecteur $\overrightarrow{DH}$ a pour coordonnées $(1,-2,2)$ (Corollaire 14.2 du cours 14 [2]). Le repère étant orthonormé, le Théorème 14.18 (ii) du cours 14 [2] donne

$$DH = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3.$$

   C'est la distance de D au plan (ABC), par la Définition 15.9 du cours 15 [3], et la valeur concorde avec le calcul de la Partie A, question 3.

   (c) *Par le Corollaire 14.2 du cours 14 [2], $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $(0,-1,-1)$, et $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ a pour coordonnées $\frac{1}{3}(0,-3,-3) = (0,-1,-1)$. Ces vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux (Théorème 14.15 (i) du cours 14 [2]).*

   Soit I le milieu de $[BC]$. Par la relation de Chasles et le Théorème 14.3 (iii) et (i) du cours 14 [2], $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI}$, car $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{IB}$. Donc $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$: le point H est situé sur la médiane issue de A du triangle ABC, aux deux tiers de cette médiane en partant de A. C'est le centre de gravité du triangle ABC (géométrie du collège).

2. *Le repère est orthonormé. Par le Théorème 15.2 (ii) du cours 15 [3], avec* $\overrightarrow{AB}(2,-1,-2)$ *et* $\overrightarrow{AC}(-2,-2,-1)$,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4+2+2 = 0,$$

et, par le Théorème 14.18 (ii) du cours 14 [2],

$$AB = \sqrt{4+1+4} = 3, \qquad AC = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont donc orthogonaux (Théorème 15.4 du cours 15 [3]). Ils ne sont pas nuls, donc les droites* (AB) *et* (AC) *sont perpendiculaires (Définition 14.12 (i) du cours 14 [2]) : le triangle* ABC *est rectangle en* A. *Comme* $AB = AC$, *il est isocèle rectangle en* A.

3. *Par le Corollaire 14.2 du cours 14 [2],* $\overrightarrow{BA}(-2,1,2)$ *et* $\overrightarrow{BC}(-2-2, 0-1, 0-(-1))$, *soit* $\overrightarrow{BC}(-4,-1,1)$. *Le repère étant orthonormé, le Théorème 15.2 (ii) du cours 15 [3] et le Théorème 14.18 (ii) du cours 14 [2] donnent*

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 8-1+2 = 9, \qquad BC = \sqrt{16+1+1} = 3\sqrt{2},$$

et $BA = AB = 3$ *(question 2). Les vecteurs* $\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *ne sont pas nuls ; leur angle* θ *est l'angle géométrique* $\widehat{ABC}$, *dans* $[0,\pi]$ *(Définition 15.2 du cours 15 [3]). Par le Théorème 15.5 du cours 15 [3],*

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \frac{9}{3\times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par les Théorèmes 11.8 (i) et 11.5 du cours 11 [1], la fonction cos *est strictement décroissante sur* $[0,\pi]$, *et* $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *: le seul réel de* $[0,\pi]$ *de cosinus* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *est* $\frac{\pi}{4}$. *Donc* $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$, *ce qui est cohérent avec la question 2 : les angles à la base d'un triangle isocèle rectangle mesurent* $\frac{\pi}{4}$.

4. *Les points* A, B, C *ne sont pas alignés (Partie A, question 1). Par le Corollaire 15.1 (ii) du cours 15 [3] et le Théorème 14.18 (ii) du cours 14 [2], avec* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-3,6,-6)$, *l'aire du triangle* ABC *est*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{9+36+36} = \frac{1}{2}\sqrt{81} = \frac{9}{2}.$$

Contrôle : le triangle est rectangle en A *(question 2), donc son aire est aussi* $\frac{1}{2}AB\times AC = \frac{1}{2}\times 3\times 3 = \frac{9}{2}$.

On prend pour base du tétraèdre $ABCD$ *le triangle* ABC *et pour sommet* D. *La hauteur est la distance de* D *au plan* (ABC), *soit* $h = DH = 3$ *(question 1 (b)). Par la formule admise dans l'énoncé, le volume du tétraèdre est*

$$V = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}\times h = \frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 3 = \frac{9}{2}.$$

Problème 2 *L'espace est muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. *On considère l'ensemble* $\mathcal{S}$ *des points* $M(x, y, z)$ *tels que*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 19 = 0,$$

et le plan $\mathcal{P}$ *d'équation* $x + 2y + 2z - 12 = 0$.

1. *Montrer que* $\mathcal{S}$ *est une sphère, dont on précisera le centre* Ω *et le rayon* R.

2. (a) *Calculer la distance du point* Ω *au plan* $\mathcal{P}$. *En déduire que* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{P}$ *se coupent selon un cercle* $\mathcal{C}$, *dont on donnera le rayon.*

   (b) *Déterminer les coordonnées du centre* H *du cercle* $\mathcal{C}$.

3. *Soit* $A(1, 3, 5)$.

   (a) *Montrer que le point* A *appartient à la sphère* $\mathcal{S}$.

   (b) *Déterminer une équation cartésienne du plan* $\mathcal{Q}$ *passant par* A *et de vecteur normal* $\overrightarrow{\Omega A}$.

   (c) *Montrer que le plan* $\mathcal{Q}$ *est tangent à la sphère* $\mathcal{S}$ *en* A.

4. (a) *Montrer que les plans* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *sont sécants, et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection* Δ.

   (b) *En déduire que la droite* Δ *et la sphère* $\mathcal{S}$ *n'ont aucun point commun.*

5. *Soit* $\mathcal{D}$ *la droite de représentation paramétrique*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) *Déterminer les coordonnées des points communs à la droite* $\mathcal{D}$ *et à la sphère* $\mathcal{S}$.

   (b) *Soit* $E(1, 0, 0)$. *Montrer que* E *est le projeté orthogonal de* Ω *sur la droite* $\mathcal{D}$, *et que c'est le milieu du segment dont les extrémités sont les deux points trouvés en (a).*

Solution 2 *1. L'équation de* $\mathcal{S}$ *est de la forme* $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + e = 0$ *du Théorème 15.17 (ii) du cours 15 [3], avec* $-2a = -2$, $-2b = 2$, $-2c = -4$ *et* $e = -19$, *c'est-à-dire* $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$. *Alors*

$$k = a^2 + b^2 + c^2 - e = 1 + 1 + 4 + 19 = 25 > 0.$$

Le repère étant orthonormé, le Théorème 15.17 (ii) du cours 15 [3] dit que $\mathcal{S}$ *est la sphère de centre* $\Omega(1, -1, 2)$ *et de rayon* $R = \sqrt{25} = 5$. *Contrôle : l'équation s'écrit aussi* $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 25$.

2. (a) *Le repère est orthonormé. Par le Théorème 15.16 (ii) du cours 15 [3],*

$$d(\Omega, \mathcal{P}) = \frac{|1 + 2 \times (-1) + 2 \times 2 - 12|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-9|}{3} = 3.$$

Comme $h = d(\Omega, \mathcal{P}) = 3 < R = 5$, *le Théorème 15.18 (iii) du cours 15 [3] dit que* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{P}$ *se coupent selon le cercle* $\mathcal{C}$ *de* $\mathcal{P}$ *de centre* H, *projeté orthogonal de* Ω *sur* $\mathcal{P}$, *et de rayon*

$$\sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

(b) *Par le Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3], le vecteur* $\overrightarrow{n}(1, 2, 2)$ *est normal au plan* $\mathcal{P}$. *Par la Définition 15.9 du cours 15 [3], le projeté orthogonal* H *de* Ω *sur* $\mathcal{P}$ *est le point commun à* $\mathcal{P}$ *et à la droite passant par* Ω *de vecteur directeur* $\overrightarrow{n}$. *Cette droite a pour représentation paramétrique* $x = 1 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = 2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$ *(Théorème 14.16 (i) du cours 14 [2]). Son point de paramètre* t *appartient à* $\mathcal{P}$ *si et seulement si*

$$(1 + t) + 2(-1 + 2t) + 2(2 + 2t) - 12 = 0, \quad \textit{c'est-à-dire} \quad 9t - 9 = 0,$$

soit $t = 1$. *Le centre du cercle* $\mathcal{C}$ *est donc* $H(2, 1, 4)$. *Contrôle :* $2 + 2 + 8 - 12 = 0$, *et* $\Omega H = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$ *(Théorème 14.18 (ii) du cours 14 [2]), qui est bien la distance trouvée en (a).*

3. (a) *On a* $1^2 + 3^2 + 5^2 - 2 \times 1 + 2 \times 3 - 4 \times 5 - 19 = 1 + 9 + 25 - 2 + 6 - 20 - 19 = 0$ *: les coordonnées de* A *vérifient l'équation de* $\mathcal{S}$, *donc* $A \in \mathcal{S}$.

(b) *Par le Corollaire 14.2 du cours 14 [2],* $\overrightarrow{\Omega A}(1 - 1, 3 - (-1), 5 - 2) = \overrightarrow{\Omega A}(0, 4, 3)$, *vecteur non nul. Le repère étant orthonormé, le Théorème 15.10 (i) du cours 15 [3] donne pour équation cartésienne de* $\mathcal{Q}$

$$0 \times (x - 1) + 4(y - 3) + 3(z - 5) = 0, \quad \textit{soit} \quad 4y + 3z - 27 = 0.$$

(c) *Par le Théorème 15.16 (ii) du cours 15 [3],*

$$d(\Omega, \mathcal{Q}) = \frac{|4 \times (-1) + 3 \times 2 - 27|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5 = R.$$

Par le Théorème 15.18 (ii) du cours 15 [3], $\mathcal{Q}$ *et* $\mathcal{S}$ *ont donc un seul point commun, le projeté orthogonal* H' *de* Ω *sur* $\mathcal{Q}$, *et* $\mathcal{Q}$ *est tangent à* $\mathcal{S}$ *en* H'.

Par la Définition 15.9 du cours 15 [3], H' *est le seul point commun à* $\mathcal{Q}$ *et à la droite passant par* Ω *de vecteur directeur* $\overrightarrow{\Omega A}$, *vecteur normal à* $\mathcal{Q}$. *Or le point* A *est sur cette droite (Définition 14.6 (i) du cours 14 [2], avec* $\overrightarrow{\Omega A} = 1 \times \overrightarrow{\Omega A}$*) et sur* $\mathcal{Q}$ *(par construction). Donc* $H' = A$ *: le plan* $\mathcal{Q}$ *est tangent à la sphère* $\mathcal{S}$ *en* A.

4. (a) *Par le Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3], $\overrightarrow{n}(1,2,2)$ et $\overrightarrow{n}'(0,4,3)$ sont des vecteurs normaux respectivement à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{Q}$. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ n'est pas nul ; s'il existait un réel k tel que $\overrightarrow{n}' = k\overrightarrow{n}$, la première coordonnée donnerait $0 = k$, et la deuxième $4 = 2k = 0$, ce qui est impossible. Donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont pas colinéaires (Théorème 14.4 (ii) du cours 14 [2]).*

Par le Théorème 15.13 (ii) du cours 15 [3], les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants, et leur droite d'intersection Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$. Le repère étant orthonormé direct, la Définition 15.7 du cours 15 [3] donne pour coordonnées de ce vecteur

$$(2 \times 3 - 2 \times 4,\ 2 \times 0 - 1 \times 3,\ 1 \times 4 - 2 \times 0) = (-2, -3, 4).$$

Cherchons un point de Δ de cote $z = 1$: l'équation de $\mathcal{Q}$ donne $4y + 3 - 27 = 0$, soit $y = 6$, puis celle de $\mathcal{P}$ donne $x + 12 + 2 - 12 = 0$, soit $x = -2$. Le point $K(-2, 6, 1)$ appartient donc à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{Q}$, c'est-à-dire à Δ. Par le Théorème 14.16 (i) du cours 14 [2], une représentation paramétrique de Δ est

$$\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 6 - 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Contrôle : pour tout réel t, $(-2 - 2t) + 2(6 - 3t) + 2(1 + 4t) - 12 = 0$ et $4(6 - 3t) + 3(1 + 4t) - 27 = 0$.

(b) *Supposons qu'un point M soit commun à Δ et à $\mathcal{S}$. Comme Δ est contenue dans $\mathcal{Q}$, le point M est commun à $\mathcal{Q}$ et à $\mathcal{S}$; par la question 3 (c), $M = A$. Mais Δ est aussi contenue dans $\mathcal{P}$, et $A \notin \mathcal{P}$, car $1 + 2 \times 3 + 2 \times 5 - 12 = 5 \neq 0$. C'est impossible : la droite Δ et la sphère $\mathcal{S}$ n'ont aucun point commun.*

5. (a) *Le point $M(1, 2t, t)$ de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si*

$$1 + 4t^2 + t^2 - 2 + 4t - 4t - 19 = 0, \quad \textit{c'est-à-dire} \quad 5t^2 - 20 = 0,$$

soit $t^2 = 4$, ou encore $t = 2$ ou $t = -2$. La droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont donc deux points communs,

$$M_1(1, 4, 2) \quad (t = 2) \qquad \textit{et} \qquad M_2(1, -4, -2) \quad (t = -2).$$

Contrôle : $1+16+4-2+8-8-19 = 0$ et $1+16+4-2-8+8-19 = 0$.

(b) *Par le Théorème 14.16 (i) du cours 14 [2], $\mathcal{D}$ est la droite passant par $E(1, 0, 0)$ (paramètre $t = 0$) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(0, 2, 1)$; elle passe aussi par le point $F(1, 2, 1)$ (paramètre $t = 1$), et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{u}$. Par le Théorème 15.6 (i) du cours 15, appliqué aux points distincts E et F et au point Ω, le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D} = (EF)$ existe*

et est unique : c'est le seul point N de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{N\Omega} \perp \overrightarrow{u}$ (Définition 15.3 du cours 15 [3]). Or $E \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{E\Omega}(0,-1,2)$. Le repère étant orthonormé, le Théorème 15.2 (ii) du cours 15 donne

$$\overrightarrow{E\Omega} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \times 0 + (-1) \times 2 + 2 \times 1 = 0,$$

donc $\overrightarrow{E\Omega} \perp \overrightarrow{u}$ (Théorème 15.4 du cours 15 [3]). Donc E est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$.
Par le Corollaire 14.2 du cours 14 [2], le milieu de $[M_1M_2]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{4-4}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (1,0,0)$: c'est le point E.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 15. Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.