Problèmes type Bac & Solutions : Dénombrement, Combinatoire

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 17.6 du cours 17* désigne un énoncé numéroté du cours 17 [2], sur le dénombrement, et un renvoi comme *Théorème 7.2 du cours 7*, un énoncé numéroté du cours sur les probabilités [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *Dans ce problème, on utilise les permutations, les combinaisons et le principe multiplicatif, puis on calcule une probabilité par dénombrement.*

Partie A : permutations

1. *Combien y a-t-il de façons de ranger 5 livres différents sur une étagère ?*
2. *Parmi ces 5 livres, 2 sont les deux tomes d'une même série, qui doivent être placés côte à côte. Combien y a-t-il de rangements possibles ?*

Partie B : combinaisons

1. *Dans un groupe de 10 personnes, on forme une équipe de 4 membres. Combien d'équipes différentes peut-on former ?*
2. *L'équipe doit maintenant être composée d'un leader, d'un assistant et de deux autres membres. Combien y a-t-il de façons de former cette équipe ?*

Partie C : probabilités et dénombrement

Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules bleues. On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1. *Combien y a-t-il de tirages possibles ?*
2. *Quelle est la probabilité de tirer exactement 2 boules rouges ?*

Solution 1 ***Partie A : permutations***

1. *Ranger les 5 livres, c'est les placer tous dans un certain ordre : un rangement est une permutation de l'ensemble des 5 livres (Définition 17.5 du cours 17 [2]). Par le Corollaire 17.1 du cours 17 [2], il y a*

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

façons de ranger les 5 livres.

2. *Notons T_1 et T_2 les deux tomes, et L_3, L_4, L_5 les trois autres livres. Dans un rangement où T_1 et T_2 sont côte à côte, on colle les deux tomes en un seul bloc T. Un tel rangement est alors décrit par deux données :*

   - *l'ordre des 4 objets T, L_3, L_4, L_5 sur l'étagère, qui est une permutation de ces 4 objets : il y en a $4! = 24$ (Corollaire 17.1 du cours 17 [2]) ;*
   - *l'ordre des deux tomes à l'intérieur du bloc, T_1T_2 ou T_2T_1, qui est une permutation de $\{T_1, T_2\}$: il y en a $2! = 2$.*

   Inversement, un couple formé d'une permutation des 4 objets et d'un ordre des deux tomes donne un seul rangement, où les tomes sont côte à côte : on remplace T par les deux tomes dans l'ordre choisi. On a donc une bijection entre les rangements cherchés et le produit cartésien de l'ensemble des 24 permutations des 4 objets par l'ensemble des 2 ordres des tomes. Par la Remarque 17.1 et le Théorème 17.2 du cours 17 [2], il y a

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

   rangements possibles.

Partie B : combinaisons

1. *Les 4 membres n'ont pas de rôle : l'ordre ne compte pas, et une personne ne peut pas figurer deux fois. Une équipe est donc une partie à 4 éléments de l'ensemble des 10 personnes (Définition 17.6 du cours 17 [2]). Comme $0 \leq 4 \leq 10$, le Théorème 17.6 du cours 17 [2] donne*

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

   équipes différentes.

2. *On forme l'équipe en trois étapes successives : on choisit le leader parmi les 10 personnes, puis l'assistant parmi les 9 autres, puis les deux autres membres, sans rôle, parmi les 8 personnes restantes. À la troisième étape, les deux membres forment une partie à 2 éléments d'un ensemble à 8 éléments : il y a $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$ possibilités (Théorème 17.6 du cours 17 [2], avec $0 \leq 2 \leq 8$). Les possibilités de chaque étape dépendent des choix précédents, mais pas leur nombre : 10, puis 9, puis 28. Par le principe multiplicatif (Théorème 17.3 du cours 17 [2]), il y a*

$$10 \times 9 \times \binom{8}{2} = 10 \times 9 \times 28 = 2\,520$$

   façons de former l'équipe.

   Contrôle : on peut aussi choisir d'abord les 4 membres, en $\binom{10}{4} = 210$ façons, puis le leader parmi eux (4 possibilités), puis l'assistant parmi les 3 autres (3 possibilités) ; le Théorème 17.3 du cours 17 [2] donne de nouveau $210 \times 4 \times 3 = 2\,520$.

Partie C : probabilités et dénombrement
On suppose les 10 boules discernables (numérotées, par exemple).

1. *Le tirage est simultané : un tirage est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 10 boules (Remarque 17.6 (iii) du cours 17 [2]). Soit* Ω *l'ensemble de ces parties ; comme* $0 \leq 3 \leq 10$*, le Théorème 17.6 du cours 17 [2] donne*

$$\mathrm{Card}\,(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

tirages possibles.

2. *Le tirage se fait au hasard : on munit* Ω *de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). Soit* A *l'événement* tirer exactement 2 boules rouges. *Un tirage de* A *est la donnée d'une partie à 2 éléments des 5 boules rouges et d'une partie à 1 élément des 5 boules qui ne sont pas rouges (3 vertes et 2 bleues) ; leur réunion redonne le tirage. Par la Remarque 17.1, le Théorème 17.2 et le Théorème 17.6 du cours 17 [2],*

$$\mathrm{Card}\,(A) = \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = 10 \times 5 = 50.$$

Par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],

$$\mathbf{P}\,(A) = \frac{\mathrm{Card}\,(A)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}.$$

Problème 2 *Un groupe de 12 étudiants, composé de 5 étudiants en mathématiques, 4 en physique et 3 en chimie, doit choisir un comité de 4 étudiants pour le représenter dans une conférence internationale.*

1. *Combien de comités différents peut-on former ?*
2. *Combien de comités contiennent au moins un étudiant de chaque spécialité ?*
3. *On choisit un comité au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit composé d'exactement 2 étudiants en mathématiques et 2 en physique ?*
4. *On choisit un comité au hasard. Quelle est la probabilité qu'il contienne au moins un étudiant en chimie ?*
5. *Pour préparer la conférence, les étudiants travaillent en duos. Combien de duos formés de deux étudiants de spécialités différentes peut-on former ?*

Solution 2 *Dans tout le problème, un comité est une partie à 4 éléments de l'ensemble des 12 étudiants : l'ordre ne compte pas, et un étudiant ne peut pas figurer deux fois (Définition 17.6 du cours 17 [2]). On note* M*,* P *et* C *les ensembles des étudiants en mathématiques, en physique et en chimie, qui ont 5, 4 et 3 éléments et sont deux à deux disjoints.*

1. *Comme* $0 \leq 4 \leq 12$, *le Théorème 17.6 du cours 17 [2] donne*

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\,8!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

comités différents. On note Ω *l'ensemble des comités.*

2. *Un comité qui contient au moins un étudiant de chaque spécialité a 4 membres répartis en 3 spécialités, chacune représentée au moins une fois : une seule spécialité a 2 représentants. On sépare donc trois cas, deux à deux disjoints : (2 en mathématiques, 1 en physique, 1 en chimie), (1, 2, 1) et (1, 1, 2).*

   - *Un comité du premier cas est la donnée d'une partie à 2 éléments de* M*, d'une partie à 1 élément de* P *et d'une partie à 1 élément de* C *; leur réunion redonne le comité. Par la Remarque 17.1, le Théorème 17.2 et le Théorème 17.6 du cours 17 [2], il y en a* $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 10 \times 4 \times 3 = 120$.
   - *De même, il y a* $\binom{5}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{3}{1} = 5 \times 6 \times 3 = 90$ *comités du deuxième cas,*
   - *et* $\binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ *comités du troisième cas.*

   Par le Théorème 17.1 (iii) du cours 17 [2], il y a

$$120 + 90 + 60 = 270$$

   comités contenant au moins un étudiant de chaque spécialité.

   On ne peut pas choisir d'abord un étudiant de chaque spécialité, puis un quatrième parmi les 9 autres : on obtiendrait $5 \times 4 \times 3 \times 9 = 540$*, mais chaque comité serait compté deux fois, une fois pour chacun de ses deux représentants de la même spécialité.*

3. *Le comité est choisi au hasard : on munit* Ω *de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). Soit* B *l'événement* le comité a exactement 2 étudiants en mathématiques et 2 en physique. *Un comité de* B *est la donnée d'une partie à 2 éléments de* M *et d'une partie à 2 éléments de* P *; comme à la question 2,* $\mathrm{Card}\,(B) = \binom{5}{2} \times \binom{4}{2} = 10 \times 6 = 60$. *Par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}\,(B) = \frac{60}{495} = \frac{4}{33}.$$

4. *Soit* D *l'événement* le comité contient au moins un étudiant en chimie. *Son contraire* $\bar{D}$ *est* le comité ne contient aucun étudiant en chimie *: ses comités sont les parties à 4 éléments de l'ensemble des* $12-3 = 9$ *étudiants qui ne sont pas en chimie, et* $\mathrm{Card}\left(\bar{D}\right) = \binom{9}{4} = 126$ *(Théorème 17.6 du cours 17 [2], avec* $0 \leq 4 \leq 9$*). Avec la probabilité uniforme de la question*

3, le Théorème 7.2 du cours 7 [1] donne $\mathbf{P}\left(\bar{D}\right) = \frac{126}{495} = \frac{14}{55}$. *Le Théorème 7.1 (iv) du cours 7 [1] donne alors*

$$\mathbf{P}(D) = 1 - \mathbf{P}\left(\bar{D}\right) = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}.$$

5. *Un duo est une partie à 2 éléments de l'ensemble des 12 étudiants. Les duos de deux étudiants de spécialités différentes se répartissent en trois cas deux à deux disjoints : mathématiques et physique, mathématiques et chimie, physique et chimie. Un duo du premier cas est la donnée d'un étudiant de* M *et d'un étudiant de* P*, donc d'un couple de* $M \times P$ *: il y en a* $5 \times 4 = 20$ *(Remarque 17.1 et Théorème 17.2 du cours 17 [2]). De même, il y a* $5 \times 3 = 15$ *duos du deuxième cas et* $4 \times 3 = 12$ *duos du troisième. Par le Théorème 17.1 (iii) du cours 17 [2], on peut former*

$$20 + 15 + 12 = 47$$

duos d'étudiants de spécialités différentes.

Contrôle par le complémentaire : il y a $\binom{12}{2} = 66$ *duos en tout, dont* $\binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} = 10 + 6 + 3 = 19$ *formés de deux étudiants de la même spécialité, et* $66 - 19 = 47$ *(Théorème 17.1 (i) et (iii) du cours 17 [2]).*

Problème 3 *Dans un tournoi d'échecs, 10 joueurs participent à une série de matchs. Chaque joueur affronte chacun des autres joueurs une fois et une seule.*

1. *Combien de matchs seront joués lors de ce tournoi ?*
2. *Chaque match se termine par la victoire de l'un des deux joueurs ou par un match nul. Combien de résultats différents sont possibles pour l'ensemble du tournoi ?*
3. *À la fin du tournoi, on remet les médailles d'or, d'argent et de bronze aux trois meilleurs joueurs (il n'y a pas d'ex æquo). De combien de façons peut-on attribuer ces médailles ?*
4. *Le tournoi est organisé sur deux jours : 22 matchs le premier jour, et les autres le deuxième jour. De combien de façons peut-on répartir les matchs sur les deux jours ?*
5. *Les joueurs appartiennent à trois clubs : 4 joueurs du club A, 3 du club B et 3 du club C. Combien de matchs opposeront deux joueurs de clubs différents ?*

Solution 3 *Les 10 joueurs sont discernables ; deux joueurs donnés se rencontrent en un seul match.*

1. *Un match est déterminé par les deux joueurs qui s'affrontent, sans ordre : c'est une partie à 2 éléments de l'ensemble des 10 joueurs. Comme* $0 \leq 2 \leq 10$*, le Théorème 17.6 du cours 17 [2] donne*

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

matchs.

2. *Numérotons les joueurs de 1 à 10 et les 45 matchs de 1 à 45. Chaque match a 3 issues possibles : victoire du joueur de plus petit numéro, victoire de l'autre joueur, ou match nul. Un résultat du tournoi associe à chaque match son issue : c'est une 45-liste d'éléments de l'ensemble des 3 issues, dans laquelle une même issue peut figurer plusieurs fois (Définition 17.2 et Remarque 17.3 du cours 17 [2]). Par le Théorème 17.4 du cours 17 [2], il y a*

$$3^{45} = 2\,954\,312\,706\,550\,833\,698\,643$$

résultats possibles.

3. *Une attribution des médailles est la liste (médaille d'or, médaille d'argent, médaille de bronze) de trois joueurs distincts : l'ordre compte, sans répétition. C'est un arrangement de 3 joueurs parmi 10 (Définition 17.4 du cours 17 [2]), et tout arrangement* (a, b, c) *peut se produire : si* a *gagne tous ses matchs,* b *tous sauf celui contre* a*, et* c *tous sauf ceux contre* a *et* b*, alors* a*,* b *et* c *sont, dans cet ordre, les trois meilleurs joueurs. Comme* $1 \leq 3 \leq 10$*, le Théorème 17.5 (i) du cours 17 [2] donne*

$$A_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

façons d'attribuer les médailles.

4. *Une répartition est déterminée par l'ensemble des 22 matchs joués le premier jour, les* $45 - 22 = 23$ *autres étant joués le deuxième jour ; inversement, toute partie à 22 éléments de l'ensemble des 45 matchs donne une répartition. Par la Remarque 17.1 et le Théorème 17.6 du cours 17 [2], avec* $0 \leq 22 \leq 45$*, il y a*

$$\binom{45}{22} = \frac{45!}{22!\,23!} = 4\,116\,715\,363\,800$$

répartitions. On choisirait de même les 23 matchs du deuxième jour : $\binom{45}{23} = \binom{45}{22}$*, par la symétrie (Théorème 17.7 (ii) du cours 17 [2]).*

5. *On compte par le complémentaire. Les matchs entre deux joueurs d'un même club se répartissent en trois cas deux à deux disjoints, selon le club : il y en a* $\binom{4}{2} = 6$ *dans le club* A*,* $\binom{3}{2} = 3$ *dans le club* B *et* $\binom{3}{2} = 3$ *dans le club* C *(Théorème 17.6 du cours 17 [2]). Il y en a donc* $6 + 3 + 3 = 12$ *en tout (Théorème 17.1 (iii) du cours 17 [2]). Les matchs entre joueurs*

de clubs différents forment le complémentaire de cet ensemble dans l'ensemble des 45 matchs ; par le Théorème 17.1 (i) du cours 17 [2], il y en a

$$45 - 12 = 33.$$

Contrôle : un match entre un joueur du club A et un joueur du club B correspond à un seul couple de joueurs, l'un de A et l'autre de B (Remarque 17.1 et Théorème 17.2 du cours 17 [2]). En additionnant les trois cas disjoints (Théorème 17.1 (iii) du cours 17 [2]), on obtient $4 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 = 12 + 12 + 9 = 33$.

Problème 4 *Un jeu télévisé propose à un candidat de choisir simultanément et au hasard 3 enveloppes parmi 10, chacune contenant un billet de banque : 4 enveloppes contiennent un billet de 20 euros, 3 un billet de 50 euros et les 3 autres un billet de 100 euros. Le candidat gagne la somme des billets des enveloppes qu'il a choisies.*

1. *Combien y a-t-il de façons de choisir 3 enveloppes parmi les 10 ?*
2. *Quelle est la probabilité que le candidat choisisse exactement deux enveloppes contenant un billet de 50 euros ?*
3. *Quelle est la probabilité que le candidat gagne exactement 170 euros ?*
4. *On sait que le candidat a gagné plus de 100 euros. Quelle est alors la probabilité qu'il ait choisi au moins une enveloppe contenant un billet de 100 euros ?*
5. *Le jeu est modifié : le candidat choisit maintenant au hasard 4 enveloppes parmi les 10. Quelle est la probabilité qu'il choisisse au moins deux enveloppes contenant un billet de 20 euros ?*

Solution 4 *Les 10 enveloppes sont discernables. Le candidat choisit ses enveloppes simultanément, sans ordre : un choix est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 10 enveloppes (Remarque 17.6 (iii) du cours 17 [2]). Soit* Ω *l'ensemble de ces parties. Le choix se fait au hasard : on munit* Ω *de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]).*

1. *Comme* $0 \leq 3 \leq 10$*, le Théorème 17.6 du cours 17 [2] donne*

$$\mathrm{Card}\,(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120.$$

2. *Soit A l'événement* exactement deux enveloppes de 50 euros. *Un choix de A est la donnée de 2 enveloppes parmi les 3 de 50 euros et d'une enveloppe parmi les 7 autres. Par la Remarque 17.1, le Théorème 17.2 et le Théorème 17.6 du cours 17 [2],* $\mathrm{Card}\,(A) = \binom{3}{2} \times \binom{7}{1} = 3 \times 7 = 21$*. Par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}\,(A) = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}.$$

3. *Notons a, b et c les nombres d'enveloppes de 20, 50 et 100 euros choisies, avec $a+b+c=3$. Le gain $20a+50b+100c$ ne dépend que de (a,b,c) ; voici toutes les compositions possibles :*

(a,b,c)	$(3,0,0)$	$(2,1,0)$	$(2,0,1)$	$(1,2,0)$	$(1,1,1)$
gain	60	90	140	120	170
(a,b,c)	$(1,0,2)$	$(0,3,0)$	$(0,2,1)$	$(0,1,2)$	$(0,0,3)$
gain	220	150	200	250	300

Le gain vaut 170 euros pour la seule composition $(1,1,1)$: une enveloppe de chaque sorte. Soit S cet événement ; un choix de S est la donnée d'une enveloppe de 20 euros, d'une de 50 et d'une de 100, donc $\mathrm{Card}\,(S) = 4\times 3\times 3 = 36$ *(Remarque 17.1 et Théorème 17.2 du cours 17 [2]). Par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}\,(S) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

4. *Soient G l'événement* le gain dépasse 100 euros *et H l'événement* au moins une enveloppe de 100 euros. *Par le tableau de la question 3, le gain ne vaut jamais 100 euros, et il vaut au plus 100 euros pour les seules compositions $(3,0,0)$ et $(2,1,0)$. Il y a $\binom{4}{3} = 4$ choix de composition $(3,0,0)$, et $\binom{4}{2}\times\binom{3}{1} = 6\times 3 = 18$ choix de composition $(2,1,0)$ (Remarque 17.1, Théorèmes 17.2 et 17.6 du cours 17 [2]). Par le Théorème 17.1 (i) et (iii) du cours 17 [2],*

$$\mathrm{Card}\,(G) = 120 - (4+18) = 98.$$

Toutes les compositions avec $c\geq 1$ donnent un gain d'au moins 140 euros : H est contenu dans G, donc $H\cap G = H$. Le contraire de H est aucune enveloppe de 100 euros, *c'est-à-dire 3 enveloppes parmi les 7 autres ; par les Théorèmes 17.6 et 17.1 (i) du cours 17 [2],*

$$\mathrm{Card}\,(H\cap G) = \mathrm{Card}\,(H) = \binom{10}{3} - \binom{7}{3} = 120 - 35 = 85.$$

Comme $\mathbf{P}\,(G) = \frac{98}{120} > 0$, la Définition 7.4 et le Théorème 7.2 du cours 7 [1] donnent

$$\mathbf{P}\,(H\mid G) = \frac{\mathbf{P}\,(H\cap G)}{\mathbf{P}\,(G)} = \frac{85/120}{98/120} = \frac{85}{98}.$$

On peut gagner plus de 100 euros sans billet de 100 euros : $20+50+50 = 120$ et $50+50+50 = 150$. Ce sont les $\binom{4}{1}\times\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 12+1 = 13$ choix de G qui ne sont pas dans H (compositions $(1,2,0)$ et $(0,3,0)$), ce qui confirme $\mathrm{Card}\,(G) = 85+13 = 98$.

5. *Un choix est maintenant une partie à 4 éléments de l'ensemble des 10 enveloppes ; soit* Ω' *l'ensemble de ces parties, muni de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). Comme* $0 \leq 4 \leq 10$, $\text{Card}\left(\Omega'\right) = \binom{10}{4} = 210$ *(Théorème 17.6 du cours 17 [2]). Soit* K *l'événement* au moins deux enveloppes de 20 euros. *Son contraire* $\bar{K}$ *est* au plus une enveloppe de 20 euros *; on sépare deux cas disjoints (Remarque 17.7 du cours 17 [2]).*

   - *Aucune enveloppe de 20 euros : 4 enveloppes parmi les 6 autres, soit* $\binom{6}{4} = 15$ *choix.*
   - *Exactement une enveloppe de 20 euros : une parmi 4, puis 3 parmi les 6 autres, soit* $\binom{4}{1} \times \binom{6}{3} = 4 \times 20 = 80$ *choix (Remarque 17.1, Théorèmes 17.2 et 17.6 du cours 17 [2]).*

   Donc $\text{Card}\left(\bar{K}\right) = 15 + 80 = 95$ *(Théorème 17.1 (iii) du cours 17 [2]). Par les Théorèmes 7.1 (iv) et 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}\left(K\right) = 1 - \frac{95}{210} = \frac{115}{210} = \frac{23}{42}.$$

   Contrôle : en séparant les cas 2, 3 et 4 enveloppes de 20 euros, $\binom{4}{2}\binom{6}{2} + \binom{4}{3}\binom{6}{1} + \binom{4}{4} = 90 + 24 + 1 = 115$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.