Problèmes type Bac & Solutions : Les Matrices

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 18.7 du cours 18* désigne un énoncé numéroté du cours 18 [2], sur les matrices, et un renvoi comme *Théorème 1.4 du cours 1*, un énoncé numéroté du cours sur les suites numériques [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et, pour deux réels x et y, la matrice colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. *Calculer $A + B$ et AB.*
2. *La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.*
3. *Déterminer les réels x et y tels que $AV = V$.*
4. *Résoudre l'équation $AV = BV$, d'inconnues x et y. Calculer* $\det(A - B)$, *et expliquer le résultat.*

Solution 1

1. *A et B ont le même type $(2, 2)$; on les additionne coefficient par coefficient (Définition 18.4 du cours 18 [2]) :*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+0 \\ 3+0 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

A a 2 colonnes et B a 2 lignes : le produit AB est défini, et se calcule ligne par colonne (Définition 18.5 et Remarque 18.1 du cours 18 [2]) :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 3 \times (-1) + 4 \times 0 & 3 \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. *Par la Définition 18.8 (i) du cours 18 [2],*

$$\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0.$$

Par le Théorème 18.7 du cours 18 [2], A est inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Contrôle : $AA^{-1} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = I_2$.

3. *Par la Définition 18.5 et l'égalité des matrices (Définition 18.1 du cours 18 [2]), l'égalité $AV = V$ équivaut au système de gauche ci-dessous. On note L_1, L_2 ses équations. On retranche d'abord x des deux membres de L_1, et y de ceux de L_2, ce qui donne des équations équivalentes ; puis chaque flèche indique des opérations du Théorème 18.12 du cours 18 [2], qui donnent des systèmes équivalents :*

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y=x \\ 3x+4y=y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2y=0 \\ 3x+3y=0 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ 3x+3y=0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ 3x=0 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Les seuls réels qui conviennent sont $x = y = 0$: $AV = V$ si et seulement si $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Contrôle : le système s'écrit aussi $(A - I_2)\,V = 0$, avec $A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, dont le déterminant vaut $0 \times 3 - 2 \times 3 = -6 \neq 0$; par le Théorème 18.11 (i) du cours 18 [2], ce système a une seule solution, et c'est donc $(0, 0)$.

4. *Par la Définition 18.5 et l'égalité des matrices (Définition 18.1 du cours 18 [2]), l'équation $AV = BV$ équivaut au système de gauche ci-dessous. On ajoute x aux deux membres de L_1, et on retranche y de ceux de L_2, ce qui donne des équations équivalentes ; puis on multiplie L_1 par $\frac{1}{2} \neq 0$ et L_2 par $\frac{1}{3} \neq 0$ (Théorème 18.12 (ii) du cours 18 [2]). Chaque étape donne un système équivalent :*

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y=-x \\ 3x+4y=y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x+2y=0 \\ 3x+3y=0 \end{array}\right. \overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right.$$

Le dernier système équivaut à la seule équation $x + y = 0$, c'est-à-dire à $x = -y$. Un couple (x, y) est donc solution si et seulement si $x = -y$; en posant $y = t$, l'ensemble des solutions est $\{(-t, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Il y en a une infinité.

Explication. Par la Définition 18.4, le Théorème 18.1 et le Théorème 18.2 (ii) et (iii) du cours 18 [2], $AV = BV$ équivaut à $AV - BV = 0$, c'est-à-dire à $(A - B)\,V = 0$, avec

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det(A - B) = 2 \times 3 - 2 \times 3 = 0.$$

Par le Théorème 18.11 (ii) du cours 18 [2], ce système n'a aucune solution ou en a une infinité ; comme $(0,0)$ *est solution, il en a une infinité, ce que confirme le calcul. Géométriquement, les deux équations* $2x+2y=0$ *et* $3x+3y=0$ *sont celles de deux droites, puisque les couples de coefficients* $(2,2)$ *et* $(3,3)$ *ne sont pas nuls, et ces droites sont parallèles, puisque* $\det(A-B)=0$ *(Remarque 18.5 du cours 18 [2]) ; elles passent toutes deux par l'origine : elles sont confondues.*

Problème 2 *On considère les matrices*

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le déterminant de* A.
2. *Calculer le produit* AB. *En déduire* A^{-1}.
3. *Sans calculer* $\det(B)$ *par un développement, déduire de la question 2 la valeur de* $\det(B)$.
4. *Résoudre, à l'aide de la question 2, le système*

$$(S)\begin{cases}2x+y=4\\x+2y+z=8\\y+2z=8\end{cases}$$

5. *Résoudre de nouveau le système* (S) *par la méthode de Gauss.*

Solution 2 *1. On développe selon la première ligne (Définition 18.8 (ii) du cours 18 [2]) :*

$$\det(A)=2\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=2\times3-1\times2+0=4.$$

Comme $\det(A)\neq0$, *la matrice* A *est inversible (Théorème 18.8 du cours 18 [2]).*

2. *A et B sont carrées d'ordre* 3 *; on calcule AB ligne par colonne (Définition 18.5 du cours 18 [2]) :*

$$AB=\begin{pmatrix}6-2+0&-4+4+0&2-2+0\\3-4+1&-2+8-2&1-4+3\\0-2+2&0+4-4&0-2+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=4I_3.$$

Comme $4\neq0$, *le Corollaire 18.1 du cours 18 [2] (avec* $n=3$ *et* $k=4$*) donne*

$$A^{-1}=\frac{1}{4}B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}.$$

3. *Par le Théorème 18.5 du cours 18 [2] ($n = 3$),* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. *D'autre part,* $AB = 4I_3$ *est diagonale ; en développant selon la première ligne (Définition 18.8 (ii) du cours 18 [2]),* $\det(4I_3) = 4 \times (4 \times 4 - 0 \times 0) = 64$. *Donc* $4\det(B) = 64$, *et*

$$\det(B) = 16.$$

Contrôle par la règle de Sarrus (Remarque 18.3 du cours 18 [2]) : $\det(B) = 36 + 4 + 4 - 4 - 12 - 12 = 16$.

4. *Avec* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, *le système* (S) *s'écrit* $AX = Y$ *(Définition 18.10 du cours 18 [2]). Comme* A *est inversible (questions 1 et 2), le Théorème 18.10 du cours 18 [2] montre que* (S) *a une solution et une seule :*

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{4}BY = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 - 16 + 8 \\ -8 + 32 - 16 \\ 4 - 16 + 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La seule solution de (S) *est* $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. *Vérification :* $2 \times 1 + 2 = 4$, $1 + 2 \times 2 + 3 = 8$ *et* $2 + 2 \times 3 = 8$.

5. *On note* L_1, L_2, L_3 *les équations ; chaque flèche résume des opérations du Théorème 18.12 du cours 18 [2], qui donnent des systèmes équivalents. On échange d'abord* L_1 *et* L_2, *pour avoir le coefficient* 1 *devant* x *dans la première équation :*

$$(S) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + y = 4 \\ y + 2z = 8 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3y - 2z = -12 \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ -3y - 2z = -12 \\ 4z = 12 \end{cases}$$

La dernière opération multiplie L_3 *par* $3 \neq 0$, *puis lui ajoute* L_2, *qui est une autre équation. En remontant (Remarque 18.6 du cours 18 [2]), la dernière équation donne* $z = 3$ *; la deuxième,* $-3y = -12 + 6 = -6$, *soit* $y = 2$ *; la première,* $x = 8 - 4 - 3 = 1$. *On obtient la même solution qu'à la question 4 :* $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Problème 3 *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que* P *est inversible, et calculer* P^{-1}.

2. *Vérifier que* $A = PDP^{-1}$.

3. *En déduire l'expression de* A^n *en fonction de l'entier* $n \geq 0$.

4. *On considère les suites* (x_n) *et* (y_n) *définies par* $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ *et, pour tout entier* $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n, \qquad y_{n+1} = -x_n + 4y_n.$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. *Montrer que* $U_{n+1} = AU_n$ *pour tout* $n \geq 0$, *puis exprimer* x_n *et* y_n *en fonction de* n.

5. *Montrer directement, à partir des relations de récurrence, que la suite* $(y_n - x_n)$ *est géométrique, et contrôler le résultat de la question 4.*

Solution 3 1. *Par la Définition 18.8 (i) du cours 18 [2],* $\det(P) = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$. *Par le Théorème 18.7 du cours 18 [2],* P *est inversible, et, comme* $\det(P) = 1$,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Contrôle : $PP^{-1} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = I_2$.

2. *On calcule ligne par colonne (Définition 18.5 du cours 18 [2]) :*

$$PD = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 4-3 & -4+6 \\ 2-3 & -2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

Comme P *est inversible et* D *diagonale,* A *est diagonalisable (Définition 18.11 du cours 18 [2]).*

3. *Par le Théorème 18.13 du cours 18 [2] (*P *est inversible et* $A = PDP^{-1}$*),* $A^n = PD^nP^{-1}$ *pour tout* $n \geq 0$. *Par le Théorème 18.4 du cours 18 [2],* $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. *Donc*

$$PD^n = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix},$$

puis, pour tout $n \geq 0$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2 \times 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

Contrôle : pour $n = 0$ *et pour* $n = 1$, *cette formule donne*

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = I_2 = A^0, \qquad \begin{pmatrix} 4-3 & -4+6 \\ 2-3 & -2+6 \end{pmatrix} = A.$$

4. *Pour tout $n \geq 0$, par la Définition 18.5 du cours 18 [2],*

$$AU_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + 2y_n \\ -x_n + 4y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

Par le Théorème 18.14 du cours 18 [2], $U_n = A^n U_0$ pour tout $n \geq 0$, avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Avec la question 3,

$$x_n = \left(2^{n+1} - 3^n\right) + 2\left(-2^{n+1} + 2 \times 3^n\right) = 3 \times 3^n - 2^{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1},$$
$$y_n = \left(2^n - 3^n\right) + 2\left(-2^n + 2 \times 3^n\right) = 3 \times 3^n - 2^n = 3^{n+1} - 2^n.$$

Contrôle : $x_0 = 3 - 2 = 1$, $y_0 = 3 - 1 = 2$; $x_1 = 1 + 2 \times 2 = 5 = 9 - 4$ et $y_1 = -1 + 4 \times 2 = 7 = 9 - 2$.

5. *Pour tout $n \geq 0$,*

$$y_{n+1} - x_{n+1} = (-x_n + 4y_n) - (x_n + 2y_n) = 2y_n - 2x_n = 2\left(y_n - x_n\right).$$

La suite $(y_n - x_n)$ est donc géométrique de raison 2, de premier terme $y_0 - x_0 = 1$. Par le Théorème 1.4 du cours 1 [1], $y_n - x_n = 2^n \times 1 = 2^n$ pour tout $n \geq 0$. Les expressions de la question 4 donnent bien $y_n - x_n = \left(3^{n+1} - 2^n\right) - \left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 18. Les matrices, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.