Problèmes type Bac & Solutions : Similitudes

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les énoncés et les solutions, un renvoi comme *Théorème 22.13 du cours 22* désigne un énoncé numéroté du cours 22 [5], sur les similitudes, et un renvoi comme *Théorème 1.4 du cours 1*, *Théorème 12.15 du cours 12*, *Théorème 14.6 du cours 14* ou *Théorème 20.4 du cours 20*, un énoncé numéroté du cours sur les suites numériques [1], du cours sur les nombres complexes [2], du cours sur les vecteurs et la géométrie [3] ou du cours sur les isométries du plan [4]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Problème 1 *Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; les angles sont mesurés en radians. Soient Ω le point d'affixe 2, et s l'application du plan d'écriture complexe*

$$z' = \frac{1+\boldsymbol{i}}{2}z + 1 - \boldsymbol{i}.$$

On définit une suite de points $(M_n)_{n\geq 0}$ par $M_0 = O$ et $M_{n+1} = s(M_n)$ pour tout entier $n \geq 0$; on note z_n l'affixe de M_n, et $u_n = \Omega M_n$.

1. (a) *Montrer que s est une similitude directe, de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.*
   (b) *Montrer que s a un centre, que c'est le point Ω, et écrire la forme réduite de s.*
2. (a) *Calculer z_1, z_2 et z_3.*
   (b) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $z_{n+1} - 2 = \frac{1+\boldsymbol{i}}{2}(z_n - 2)$.*
   (c) *Montrer que la suite (u_n) est géométrique ; exprimer u_n en fonction de n, et déterminer sa limite.*
   (d) *Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < 10^{-2}$.*
3. (a) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $\frac{z_n - z_{n+1}}{2 - z_{n+1}} = \boldsymbol{i}$. En déduire que le triangle $\Omega M_{n+1} M_n$ est rectangle et isocèle en M_{n+1}.*
   (b) *Pour $n \geq 1$, on note $\ell_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$ la longueur de la ligne brisée $M_0M_1 \ldots M_n$. Exprimer ℓ_n en fonction de n, et déterminer sa limite.*

4. *Pour tout entier $n \geq 1$, on note $s^n = s \circ s \circ \cdots \circ s$ (n fois), c'est-à-dire $s^1 = s$ et $s^{n+1} = s \circ s^n$.*

   (a) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, s^n est une similitude directe de rapport k^n et d'angle de mesure $\frac{n\pi}{4}$, de centre Ω, et que $M_n = s^n(M_0)$.*

   (b) *Montrer que s^4 est l'homothétie $h\left(\Omega, -\frac{1}{4}\right)$, et en déduire z_4.*

   (c) *Montrer que les points Ω, M_0 et M_n sont alignés si et seulement si n est un multiple de 4.*

Solution 1

1. (a) *Le coefficient $\frac{1+\boldsymbol{i}}{2}$ n'est pas nul : par le Théorème 22.11 du cours 22 [5], s est une similitude directe, de rapport $\left|\frac{1+\boldsymbol{i}}{2}\right| = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Par la Définition 12.5 du cours 12 [2], $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\boldsymbol{i})$, donc*

$$\frac{1+\boldsymbol{i}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\boldsymbol{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}.$$

   Par le Théorème 22.14 (ii) du cours 22, $\frac{1+\boldsymbol{i}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\boldsymbol{i}\theta}$, où θ est une mesure de l'angle de s ; le Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [2] donne $\theta = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, et $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle de s (Définition 22.4 du cours 22 [5]).

   (b) *Comme $\frac{1+\boldsymbol{i}}{2} \neq 1$, le Théorème 22.16 (ii) du cours 22 montre que s a un point invariant et un seul, son centre (Définition 22.5 du cours 22 [5]), d'affixe*

$$\frac{1-\boldsymbol{i}}{1-\frac{1+\boldsymbol{i}}{2}} = \frac{1-\boldsymbol{i}}{\frac{1-\boldsymbol{i}}{2}} = 2.$$

   C'est le point Ω. Par le Théorème 22.16 (iii) du cours 22 [5], la forme réduite de s est $s = h\left(\Omega, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \circ r\left(\Omega, \frac{\pi}{4}\right)$.

2. (a) *On a $z_0 = 0$, puis $z_1 = 1 - \boldsymbol{i}$,*

$$z_2 = \frac{(1+\boldsymbol{i})(1-\boldsymbol{i})}{2} + 1 - \boldsymbol{i} = 2 - \boldsymbol{i},$$
$$z_3 = \frac{(1+\boldsymbol{i})(2-\boldsymbol{i})}{2} + 1 - \boldsymbol{i} = \frac{3+\boldsymbol{i}}{2} + 1 - \boldsymbol{i} = \frac{5-\boldsymbol{i}}{2}.$$

   (b) *Par le Théorème 22.16 (ii) du cours 22 [5], l'image M' d'un point M d'affixe z par s a pour affixe z' telle que $z' - 2 = \frac{1+\boldsymbol{i}}{2}(z-2)$. On l'applique à $M = M_n$, dont l'image est M_{n+1}.*

(c) *Par la question précédente et le Théorème 12.6 (ii) du cours 12,* $|z_{n+1}-2| = \left|\frac{1+\boldsymbol{i}}{2}\right| |z_n-2|$, *c'est-à-dire, par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [2],* $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n$ *pour tout* $n \geq 0$. *La suite* (u_n) *est donc géométrique de raison* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *(Définition 1.5 du cours 1 [1]), de premier terme* $u_0 = \Omega O = |0-2| = 2$. *Par le Théorème 1.4 du cours 1 [1],* $u_n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ *pour tout* $n \geq 0$. *Comme* $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, *le Théorème 1.11 du cours 1 [1] donne* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, *donc* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(d) *Pour tout* n, $u_n > 0$ *et* $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n < u_n$ *: la suite* (u_n) *est strictement décroissante (Définition 1.2 (ii) du cours 1 [1]). Comme* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$,

$$u_{16} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{128} < \frac{1}{100},$$
$$u_{15} = \frac{u_{16}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{128} = \frac{\sqrt{2}}{128} > \frac{1}{100},$$

car $1{,}28^2 = 1{,}6384 < 2$, *donc* $1{,}28 < \sqrt{2}$ *et* $\frac{\sqrt{2}}{128} > \frac{1{,}28}{128} = \frac{1}{100}$. *Pour* $n \leq 15$, $u_n \geq u_{15} > 10^{-2}$ *; le plus petit entier cherché est* $n = 16$.

3. (a) *Posons* $a = \frac{1+\boldsymbol{i}}{2}$ *et* $w_n = z_n - 2$ *; par 2 (b),* $w_{n+1} = a w_n$, *et* $w_n \neq 0$, *car* $|w_n| = u_n > 0$ *(Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [2]). Alors* $a \neq 0$, $w_{n+1} \neq 0$, *et* $M_n \neq M_{n+1}$, *car* $w_n - w_{n+1} = (1-a)\, w_n \neq 0$ *; de plus*

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{2 - z_{n+1}} = \frac{w_n - w_{n+1}}{-w_{n+1}} = \frac{w_n - a w_n}{-a w_n} = \frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$$
$$= 1 - \frac{2\,(1-\boldsymbol{i})}{(1+\boldsymbol{i})\,(1-\boldsymbol{i})} = 1 - (1-\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}.$$

Par le Théorème 12.7 (ii) et le Théorème 12.6 (iii) du cours 12 [2], $\frac{M_{n+1}M_n}{M_{n+1}\Omega} = |\boldsymbol{i}| = 1$, *donc* $M_{n+1}M_n = M_{n+1}\Omega$. *Par le Théorème 12.15 du cours 12, les mesures de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{M_{n+1}\Omega}, \overrightarrow{M_{n+1}M_n}\right)$ *sont les arguments de* $\boldsymbol{i} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$, *parmi lesquels* $\frac{\pi}{2}$ *(Théorème 12.10 (ii) du cours 12 [2]). Le triangle* $\Omega M_{n+1} M_n$ *est donc rectangle et isocèle en* M_{n+1}.

(b) *Par (a),* $M_j M_{j+1} = M_{j+1}\Omega = u_{j+1}$ *pour tout* $j \geq 0$. *Donc, pour* $n \geq 1$, $\ell_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, *somme de* n *termes consécutifs de la suite géométrique* (u_n), *de raison* $\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$, *avec* $u_1 = \sqrt{2}$. *Par le Théorème 1.5 (ii) du cours 1 [1],*

$$\ell_n = \sqrt{2}\,\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(2 + 2\sqrt{2}\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right),$$

car

$$\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{4\sqrt{2}+4}{2} = 2+2\sqrt{2}.$$

Comme en 2 (c), $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ *tend vers* 0 *; par le Théorème 1.6 du cours 1 [1],* $\lim_{n\to+\infty} \ell_n = 2+2\sqrt{2}$.

4. (a) *Pour* $n \geq 1$, *notons* $\mathcal{P}_n$ *la propriété :* s^n *est une similitude directe de rapport* k^n *et d'angle de mesure* $\frac{n\pi}{4}$, *et* $M_n = s^n(M_0)$. *On raisonne par récurrence (Théorème 1.13 du cours 1 [1], appliqué à la propriété* $\mathcal{P}_{m+1}$, $m \geq 0$*). La propriété* $\mathcal{P}_1$ *est la question 1 (a), avec* $M_1 = s(M_0)$. *Supposons* $\mathcal{P}_n$ *vraie :* s^n *est une similitude directe de rapport* k^n *et d'angle de mesure* $\frac{n\pi}{4}$, *et* $M_n = s^n(M_0)$. *Par le Théorème 22.15 (i) du cours 22 [5],* $s^{n+1} = s \circ s^n$ *est une similitude directe de rapport* $k^n \times k = k^{n+1}$ *et d'angle de mesure* $\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{(n+1)\pi}{4}$ *; et* $M_{n+1} = s(M_n) = s\left(s^n(M_0)\right) = s^{n+1}(M_0)$ *:* $\mathcal{P}_{n+1}$ *est vraie.*
Soit $n \geq 1$, *et* $z' = a_n z + b_n$ *l'écriture complexe de* s^n *(Théorème 22.11 du cours 22 [5]). Comme* $k^n < 1$, *le Théorème 22.16 (i) du cours 22 donne* $a_n \neq 1$, *et* s^n *a un seul point invariant, son centre (Théorème 22.16 (ii) du cours 22 [5]). Or* $s(\Omega) = \Omega$, *donc* $s^n(\Omega) = \Omega$ *(par récurrence) : le centre de* s^n *est* Ω.

(b) *Par (a),* s^4 *est la similitude directe de centre* Ω, *de rapport* $k^4 = \frac{1}{4}$ *et d'angle de mesure* π. *Par le Théorème 22.16 (iii) du cours 22 [5],* $s^4 = h\left(\Omega, \frac{1}{4}\right) \circ r(\Omega, \pi)$. *Or* $r(\Omega, \pi) = S_\Omega$ *(Théorème 20.4 (iii) du cours 20 [4]), et* $S_\Omega = h(\Omega, -1)$ *(Remarque 22.1 du cours 22) ; par le Théorème 22.3 (i) du cours 22 [5],*

$$s^4 = h\left(\Omega, \tfrac{1}{4}\right) \circ h(\Omega, -1) = h\left(\Omega, -\tfrac{1}{4}\right).$$

Par (a) et le Théorème 22.1 (i) du cours 22 [5], $z_4 - 2 = -\frac{1}{4}(z_0 - 2) = \frac{1}{2}$, *donc* $z_4 = \frac{5}{2}$.

(c) *Soit* $n \geq 1$ *(pour* $n = 0$, $M_n = M_0$ *et les trois points sont alignés ;* 0 *est un multiple de* 4*). On a* $M_0 \neq \Omega$ *et* $M_n \neq \Omega$, *car* $u_0 > 0$ *et* $u_n > 0$. *Par (a) et le Théorème 22.17 (ii) du cours 22 [5] (où* $k^n \neq 1$*),* $\frac{n\pi}{4}$ *est une mesure de* $\left(\overrightarrow{\Omega M_0}, \overrightarrow{\Omega M_n}\right)$ *; par le Théorème 12.15 du cours 12 et la Définition 12.6 du cours 12 [2], les arguments de* $q_n = \frac{z_n - 2}{z_0 - 2}$ *sont les réels* $\frac{n\pi}{4} + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.
Par le Théorème 14.6 du cours 14 [3], comme $\Omega \neq M_0$, *les points* Ω, M_0, M_n *sont alignés si et seulement s'il existe un réel* t *tel que* $\overrightarrow{\Omega M_n} = t\overrightarrow{\Omega M_0}$, *c'est-à-dire, par le Théorème 12.7 (i) du cours 12 [2],* $z_n - 2 = t(z_0 - 2)$, *soit* $q_n = t$ *: si et seulement si* q_n, *qui n'est pas nul, est réel. Par le Théorème 12.14 (iv) du cours 12 [2], cela a lieu si et seulement si les arguments de* q_n *sont de la forme* $j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$,

c'est-à-dire s'il existe des entiers j et m tels que $\frac{n\pi}{4} + 2m\pi = j\pi$, soit $n = 4(j - 2m)$. Réciproquement, si $n = 4j$, l'argument $\frac{n\pi}{4} = j\pi$ est de cette forme. Les points Ω, M_0, M_n sont donc alignés si et seulement si n est un multiple de 4 ; ainsi M_4, d'affixe $\frac{5}{2}$, est sur l'axe réel, comme O et Ω.

Problème 2 *Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; les angles sont mesurés en radians. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives*

$$z_A = 1 + 3\boldsymbol{i}, \qquad z_B = \boldsymbol{i}, \qquad z_C = 5 + \boldsymbol{i}, \qquad z_H = 1 + \boldsymbol{i}.$$

1. (a) *Montrer que $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$: le triangle ABC est rectangle en A.*
   (b) *Montrer que H appartient à la droite (BC) et que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires : H est le pied de la hauteur issue de A.*
2. (a) *Montrer qu'il existe une similitude directe s et une seule telle que $s(B) = A$ et $s(A) = C$, et déterminer son écriture complexe.*
   (b) *Déterminer le rapport de s et une mesure de son angle.*
   (c) *Montrer que s a un centre, que c'est le point H, et écrire la forme réduite de s.*
3. (a) *Montrer que $HA = 2HB$ et $HC = 2HA$. En déduire que $HA^2 = HB \times HC$.*
   (b) *Déterminer les images par s des droites (AB) et (AH).*
4. (a) *Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$, et montrer que $s \circ s = h(H, -4)$.*
   (b) *En déduire que $\overrightarrow{HC} = -4\overrightarrow{HB}$.*
5. *Soient K le milieu de $[HB]$ et L le milieu de $[HA]$.*
   (a) *Calculer les affixes de K et de L, et montrer que $s(K) = L$.*
   (b) *Montrer que les droites (AK) et (CL) sont perpendiculaires et que $CL = 2AK$.*

Solution 2

1. (a) *On a $z_B - z_A = -1 - 2\boldsymbol{i}$ et $z_C - z_A = 4 - 2\boldsymbol{i}$, et*

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 - 2\boldsymbol{i}}{-1 - 2\boldsymbol{i}} = \frac{(4 - 2\boldsymbol{i})(-1 + 2\boldsymbol{i})}{(-1 - 2\boldsymbol{i})(-1 + 2\boldsymbol{i})}$$
$$= \frac{-4 + 8\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{i} + 4}{5} = 2\boldsymbol{i} = 2e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$$

(Définition 12.5 du cours 12 [2]). Par le Théorème 12.10 (ii) du cours 12, $\frac{\pi}{2}$ est un argument de ce quotient, donc une mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ (Théorème 12.15 du cours 12 [2]).

(b) *Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont pour affixes $z_H - z_B = 1$ et $z_C - z_B = 5$ (Théorème 12.7 (i) du cours 12 [2]) : $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, et, comme $B \neq C$, les points B, C, H sont alignés (Théorème 14.6 du cours 14 [3]) : $H \in (BC)$. Le vecteur $\overrightarrow{HA}$ a pour affixe $z_A - z_H = 2\boldsymbol{i}$, et $\operatorname{Re}(2\boldsymbol{i} \times \bar{5}) = \operatorname{Re}(10\boldsymbol{i}) = 0$: par le Théorème 20.3 (i) du cours 20 [4], $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, et les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.*

2. (a) *On a $B \neq A$ et $A \neq C$. Par le Théorème 22.13 (i) du cours 22 [5], appliqué aux points B, A, A, C (à la place de A, B, C, D), il existe une similitude directe s et une seule telle que $s(B) = A$ et $s(A) = C$; son écriture complexe est $z' = az + b$, avec*

$$a = \frac{z_C - z_A}{z_A - z_B} = \frac{4 - 2\boldsymbol{i}}{1 + 2\boldsymbol{i}} = \frac{(4 - 2\boldsymbol{i})(1 - 2\boldsymbol{i})}{5} = \frac{4 - 8\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{i} - 4}{5} = -2\boldsymbol{i},$$
$$b = z_A - az_B = 1 + 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = -1 + 3\boldsymbol{i}.$$

L'écriture complexe de s est $z' = -2\boldsymbol{i}z - 1 + 3\boldsymbol{i}$.

(b) *Le rapport de s est $|-2\boldsymbol{i}| = 2$ (Théorème 22.11 du cours 22 [5]). Comme $-2\boldsymbol{i} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$ (Définition 12.5 du cours 12), le Théorème 22.14 (ii) du cours 22 [5] et le Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [2] montrent que $-\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle de s.*

(c) *Comme $-2\boldsymbol{i} \neq 1$, s a un point invariant et un seul, son centre, d'affixe (Théorème 22.16 (ii) du cours 22 [5])*

$$\frac{-1 + 3\boldsymbol{i}}{1 + 2\boldsymbol{i}} = \frac{(-1 + 3\boldsymbol{i})(1 - 2\boldsymbol{i})}{5} = \frac{-1 + 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{i} + 6}{5} = 1 + \boldsymbol{i} = z_H.$$

Le centre de s est H, et sa forme réduite est $s = h(H, 2) \circ r\left(H, -\frac{\pi}{2}\right)$ (Théorème 22.16 (iii) du cours 22 [5]).

3. (a) *On a $s(H) = H$, $s(B) = A$ et $s(A) = C$. Comme s est une similitude de rapport 2 (Définition 22.2 du cours 22 [5]), $HA = s(H)\,s(B) = 2HB$ et $HC = s(H)\,s(A) = 2HA$. Donc*

$$HA^2 = HA \times HA = 2HB \times \frac{HC}{2} = HB \times HC.$$

Avec les affixes, $HB = |-1| = 1$, $HA = |2\boldsymbol{i}| = 2$ et $HC = |4| = 4$ (Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [2]).

(b) *Comme $A \neq B$, l'image de la droite (AB) est la droite passant par $s(A) = C$ et $s(B) = A$, c'est-à-dire (AC) (Corollaire 22.1 (iii) du cours 22 [5]). De même, comme $A \neq H$, l'image de (AH) est la droite (CH) ; comme $H \in (BC)$ et $H \neq C$, c'est la droite (BC). La hauteur issue de A a pour image la droite (BC), support de l'hypoténuse.*

4. (a) *L'application $s \circ s$ associe au point d'affixe z le point d'affixe*

$$-2\boldsymbol{i}(-2\boldsymbol{i}z - 1 + 3\boldsymbol{i}) - 1 + 3\boldsymbol{i} = -4z + 2\boldsymbol{i} + 6 - 1 + 3\boldsymbol{i} = -4z + 5 + 5\boldsymbol{i}.$$

Comme -4 est un réel différent de 0 et de 1, le Théorème 22.1 (ii) du cours 22 [5] montre que $s \circ s$ est l'homothétie de rapport -4 et de centre le point d'affixe $\frac{5+5\boldsymbol{i}}{1-(-4)} = 1 + \boldsymbol{i}$, c'est-à-dire $s \circ s = h(H, -4)$. Par le Théorème 22.15 (i) du cours 22 [5], $s \circ s$ a d'ailleurs pour rapport $2 \times 2 = 4$ et pour angle $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$, et $-4 = 4e^{-\boldsymbol{i}\pi}$.

(b) *On a $s \circ s(B) = s(A) = C$. Par (a) et la Définition 22.1 du cours 22 [5], $\overrightarrow{HC} = -4\overrightarrow{HB}$, et $HC = 4HB$.*

5. (a) *Par le Théorème 12.7 (iii) du cours 12 [2], K et L ont pour affixes*

$$z_K = \frac{z_H + z_B}{2} = \frac{1}{2} + \boldsymbol{i}, \qquad z_L = \frac{z_H + z_A}{2} = 1 + 2\boldsymbol{i}.$$

Comme K est le milieu de $[HB]$, $s(K)$ est le milieu de $[s(H)\, s(B)] = [HA]$ (Corollaire 22.1 (i) du cours 22 [5]) : $s(K) = L$. Avec l'écriture complexe, $-2\boldsymbol{i}\left(\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\right) - 1 + 3\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i} + 2 - 1 + 3\boldsymbol{i} = 1 + 2\boldsymbol{i} = z_L$.

(b) *Comme $s(A) = C$ et $s(K) = L$, le Théorème 22.14 (i) du cours 22 [5] donne $z_L - z_C = -2\boldsymbol{i}(z_K - z_A)$, avec $z_K - z_A = -\frac{1}{2} - 2\boldsymbol{i} \neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{CL}$ ont pour affixes $z_K - z_A$ et $z_L - z_C$, et*

$$\operatorname{Re}\left((z_L - z_C)\,\overline{(z_K - z_A)}\right) = \operatorname{Re}\left(-2\boldsymbol{i}\,|z_K - z_A|^2\right) = 0$$

(Théorème 12.4 (iii) du cours 12 [2]) : par le Théorème 20.3 (i) du cours 20 [4], ils sont orthogonaux, et les droites (AK) et (CL) sont perpendiculaires. Enfin, $CL = s(A)\, s(K) = 2AK$ (Définition 22.2 du cours 22 [5]). Avec les affixes, $z_L - z_C = -4 + \boldsymbol{i}$, $AK = \frac{\sqrt{17}}{2}$ et $CL = \sqrt{17}$.

Problème 3 *Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; les angles sont mesurés en radians. Soient f l'application du plan d'écriture complexe*

$$z' = (3 + 4\boldsymbol{i})\,\bar{z} - 6,$$

Ω le point d'affixe $1 + \boldsymbol{i}$, I le point d'affixe 1, et Δ l'axe réel, c'est-à-dire la droite (OI).

1. (a) *Montrer que f est une similitude indirecte, et préciser son rapport k.*
   (b) *Déterminer l'écriture complexe de $f \circ f$.*
   (c) *Montrer que f a un point invariant et un seul, que c'est Ω, et que $f \circ f = h(\Omega, 25)$.*

2. (a) *Calculer $(2+\boldsymbol{i})^2$. En déduire qu'il existe un réel α tel que $e^{\boldsymbol{i}\alpha} = \frac{2+\boldsymbol{i}}{\sqrt{5}}$, et que $3+4\boldsymbol{i} = 5e^{2\boldsymbol{i}\alpha}$.*
   (b) *Déterminer l'axe $\mathcal{D}$ de f, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, et la forme réduite de f.*
   (c) *Contrôler, à l'aide des écritures complexes, que $h(\Omega, 5) \circ S_{\mathcal{D}}$ a pour écriture complexe $z' = (3+4\boldsymbol{i})\,\bar{z} - 6$.*

3. *On note $M' = f(M)$.*
   (a) *Déterminer, par le calcul, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = 5\overrightarrow{\Omega M}$.*
   (b) *Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}'$ des points M tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = -5\overrightarrow{\Omega M}$, et montrer que c'est la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en Ω.*
   (c) *Contrôler, à l'aide des écritures complexes, que $f = h(\Omega, -5) \circ S_{\mathcal{D}'}$.*

4. (a) *Déterminer une équation cartésienne de l'image Δ' de la droite Δ par f.*
   (b) *Soit Γ le cercle de centre I et de rayon 1. Déterminer son image Γ' par f et une équation cartésienne de Γ'.*
   (c) *Montrer que O appartient à Γ', et déterminer l'affixe du point E tel que $f(E) = O$. Vérifier que E appartient à Γ.*

5. (a) *Montrer qu'il existe une similitude directe s et une seule telle que $s(O) = f(O)$ et $s(I) = f(I)$. Déterminer son écriture complexe, son rapport, une mesure de son angle et son centre.*
   (b) *Montrer que $f = s \circ S_{\Delta}$.*
   (c) *Montrer que, pour un point M, $f(M) = s(M)$ si et seulement si $M \in \Delta$.*

Solution 3

1. (a) *Le coefficient $3+4\boldsymbol{i}$ n'est pas nul : par le Théorème 22.12 du cours 22 [5], f est une similitude indirecte, de rapport $k = |3+4\boldsymbol{i}| = \sqrt{9+16} = 5$.*
   (b) *Par le Théorème 22.18 (i) du cours 22 [5], avec $a = 3+4\boldsymbol{i}$ et $b = -6$, $f \circ f$ a pour écriture complexe $z'' = 25z + a\bar{b} + b$, avec*

$$a\bar{b} + b = (3+4\boldsymbol{i}) \times (-6) - 6 = -24 - 24\boldsymbol{i},$$

   soit $z'' = 25z - 24 - 24\boldsymbol{i}$.

(c) *Comme* $k = 5 \neq 1$, *le Théorème 22.18 (ii) du cours 22 [5] montre que* f *a un point invariant et un seul, son centre, d'affixe* $\frac{-24-24\boldsymbol{i}}{1-25} = 1+\boldsymbol{i}$ *: c'est* Ω, *et* $f \circ f = h(\Omega, 25)$. *Avec l'écriture de* f, $(3+4\boldsymbol{i})(1-\boldsymbol{i})-6 = 3-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{i}+4-6 = 1+\boldsymbol{i}$.

2. (a) *On a* $(2+\boldsymbol{i})^2 = 4+4\boldsymbol{i}-1 = 3+4\boldsymbol{i}$. *Le nombre* $\frac{2+\boldsymbol{i}}{\sqrt{5}}$ *a pour module* $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$ *: par le Théorème 12.9 (ii) du cours 12 [2], il existe un réel* α *tel que* $e^{\boldsymbol{i}\alpha} = \frac{2+\boldsymbol{i}}{\sqrt{5}}$. *Par le Théorème 12.13 (iii) du cours 12 [2],*

$$e^{2\boldsymbol{i}\alpha} = \left(e^{\boldsymbol{i}\alpha}\right)^2 = \frac{(2+\boldsymbol{i})^2}{5} = \frac{3+4\boldsymbol{i}}{5}, \qquad \textit{donc} \qquad 3+4\boldsymbol{i} = 5e^{2\boldsymbol{i}\alpha}.$$

(b) *Comme* $k = 5 \neq 1$, *que* f *a pour centre* Ω *et que* $3+4\boldsymbol{i} = 5e^{2\boldsymbol{i}\alpha}$, *le Théorème 22.19 du cours 22 montre que l'axe de* f *est la droite* $\mathcal{D}$ *passant par* Ω *de vecteur directeur d'affixe* $e^{\boldsymbol{i}\alpha}$, *et que la forme réduite de* f *est* $f = h(\Omega, 5) \circ S_{\mathcal{D}}$ *(Définition 22.6 du cours 22 [5]).*

Le vecteur $\overrightarrow{w}(2,1)$, *d'affixe* $2+\boldsymbol{i} = \sqrt{5}e^{\boldsymbol{i}\alpha}$, *dirige aussi* $\mathcal{D}$ *(Définition 14.6 (ii) du cours 14 [3]). Par la Définition 14.6 (i) du cours 14 [3],* $M(x,y)$ *appartient à* $\mathcal{D}$ *si et seulement s'il existe un réel* t *tel que* $x-1 = 2t$ *et* $y-1 = t$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x-1 = 2(y-1)$ *(prendre* $t = y-1$*) : une équation de* $\mathcal{D}$ *est* $x-2y+1 = 0$.

(c) *Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [4], avec* $\omega = 1+\boldsymbol{i}$, $S_{\mathcal{D}}$ *associe au point d'affixe* z *le point d'affixe* z_1 *tel que* $z_1 - \omega = e^{2\boldsymbol{i}\alpha}\overline{z-\omega} = \frac{3+4\boldsymbol{i}}{5}(\bar{z}-1+\boldsymbol{i})$ *; puis* $h(\Omega, 5)$ *associe à* z_1 *le point d'affixe* z' *tel que* $z'-\omega = 5(z_1-\omega)$ *(Théorème 22.1 (i) du cours 22 [5]). Ainsi*

$$\begin{aligned} z' &= (3+4\boldsymbol{i})(\bar{z}-1+\boldsymbol{i})+1+\boldsymbol{i} \\ &= (3+4\boldsymbol{i})\bar{z}-7-\boldsymbol{i}+1+\boldsymbol{i} = (3+4\boldsymbol{i})\bar{z}-6. \end{aligned}$$

3. *Soit* M *d'affixe* z, *et posons* $z-\omega = X+\boldsymbol{i}Y$, *avec* $X = x-1$ *et* $Y = y-1$ *réels. Comme* $\omega = (3+4\boldsymbol{i})\bar{\omega}-6$ *(question 1 (c)), on a, en soustrayant,* $z'-\omega = (3+4\boldsymbol{i})(\bar{z}-\bar{\omega}) = (3+4\boldsymbol{i})(X-\boldsymbol{i}Y) = (3X+4Y)+\boldsymbol{i}(4X-3Y)$ *(Théorème 12.4 (i) du cours 12 [2]).*

(a) *Par le Théorème 12.7 (i) du cours 12 [2],* $\overrightarrow{\Omega M'} = 5\overrightarrow{\Omega M}$ *si et seulement si* $z'-\omega = 5(z-\omega)$, *c'est-à-dire, en identifiant parties réelles et imaginaires, si et seulement si* $3X+4Y = 5X$ *et* $4X-3Y = 5Y$. *Ces deux égalités équivalent à* $X = 2Y$, *soit* $x-1 = 2(y-1)$ *: l'ensemble cherché est la droite d'équation* $x-2y+1 = 0$, *c'est-à-dire* $\mathcal{D}$, *comme l'annonce le Théorème 22.19 (ii) du cours 22 [5].*

(b) *De même,* $\overrightarrow{\Omega M'} = -5\overrightarrow{\Omega M}$ *si et seulement si* $3X+4Y = -5X$ *et* $4X-3Y = -5Y$, *c'est-à-dire si et seulement si* $Y = -2X$, *soit* $y-1 = -2(x-1)$ *:* $\mathcal{D}'$ *est la droite d'équation* $2x+y-3 = 0$. *Elle passe par*

Ω *et a pour vecteur directeur* $\overrightarrow{w'}(-1,2)$, *d'affixe* $-1+2\boldsymbol{i}$ *(Définition 14.6 (ii) du cours 14 [3]) ; comme* $\operatorname{Re}\left((-1+2\boldsymbol{i})\,\overline{(2+\boldsymbol{i})}\right) = \operatorname{Re}(5\boldsymbol{i}) = 0$, $\overrightarrow{w'}$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{w}$ *(Théorème 20.3 (i) du cours 20 [4]) :* $\mathcal{D}'$ *est la perpendiculaire à* $\mathcal{D}$ *en* Ω.

(c) *Le vecteur d'affixe* $\boldsymbol{i}e^{\boldsymbol{i}\alpha} = e^{\boldsymbol{i}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-1+2\boldsymbol{i}}{\sqrt{5}}$ *dirige* $\mathcal{D}'$ *(Théorème 12.13 (i) du cours 12 [2]), et* $e^{2\boldsymbol{i}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{2\boldsymbol{i}\alpha}e^{\boldsymbol{i}\pi} = -\frac{3+4\boldsymbol{i}}{5}$. *Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [4] et le Théorème 22.1 (i) du cours 22 [5],* $h(\Omega,-5)\circ S_{\mathcal{D}'}$ *associe au point d'affixe* z *le point d'affixe* z' *tel que*

$$z'-\omega = -5\times\left(-\frac{3+4\boldsymbol{i}}{5}\right)\overline{z-\omega} = (3+4\boldsymbol{i})\,\overline{z-\omega},$$

c'est-à-dire, par le calcul de 2 (c), $z' = (3+4\boldsymbol{i})\,\bar{z}-6$ *: c'est l'écriture de* f. *Ainsi* $f = h(\Omega,-5)\circ S_{\mathcal{D}'}$, *conformément à la Remarque 22.5 du cours 22 [5].*

4. (a) *On a* $f(O) = -6$ *et* $f(I) = 3+4\boldsymbol{i}-6 = -3+4\boldsymbol{i}$. *Comme* $O\neq I$, *l'image de* $\Delta = (OI)$ *est la droite* Δ' *passant par les points* $P(-6,0)$ *et* $Q(-3,4)$, *images de* O *et* I *(Corollaire 22.1 (iii) du cours 22 [5]). Elle a pour vecteur directeur* $\overrightarrow{PQ}(3,4)$ *; par la Définition 14.6 (i) du cours 14 [3],* $M(x,y)\in\Delta'$ *si et seulement s'il existe un réel* t *tel que* $x+6 = 3t$ *et* $y = 4t$, *c'est-à-dire si et seulement si* $4(x+6) = 3y$ *(prendre* $t = \frac{y}{4}$*). Une équation de* Δ' *est* $4x-3y+24 = 0$.

(b) *Par le Corollaire 22.1 (vi) du cours 22 [5],* Γ' *est le cercle de centre* $f(I) = Q$ *et de rayon* $5\times 1 = 5$. *Par le Théorème 14.18 (i) du cours 14 [3],* $M(x,y)\in\Gamma'$ *si et seulement si* $QM = 5$, *c'est-à-dire, en élevant au carré (les deux membres sont positifs),* $(x+3)^2+(y-4)^2 = 25$.

(c) *Comme* $(0+3)^2+(0-4)^2 = 25$, $O\in\Gamma'$. *La similitude* f *est une bijection (Théorème 22.6 (i) du cours 22 [5]) : le point* E *existe et il est unique. Son affixe* z_E *vérifie* $(3+4\boldsymbol{i})\,\overline{z_E} = 6$, *soit*

$$\overline{z_E} = \frac{6}{3+4\boldsymbol{i}} = \frac{6(3-4\boldsymbol{i})}{25}, \qquad z_E = \frac{18+24\boldsymbol{i}}{25}$$

(Théorème 12.4 (i) du cours 12 [2]). Enfin, par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [2],

$$IE = |z_E-1| = \left|\frac{-7+24\boldsymbol{i}}{25}\right| = \frac{\sqrt{49+576}}{25} = \frac{25}{25} = 1,$$

donc $E\in\Gamma$.

5. (a) *On a* $O \neq I$ *et* $f(O) \neq f(I)$. *Par le Théorème 22.13 (i) du cours 22 [5], il existe une similitude directe* s *et une seule telle que* $s(O) = f(O)$ *et* $s(I) = f(I)$ *; son écriture complexe est* $z' = a_1 z + b_1$, *avec*

$$a_1 = \frac{(-3+4\boldsymbol{i}) - (-6)}{1-0} = 3+4\boldsymbol{i}, \qquad b_1 = -6 - a_1 \times 0 = -6,$$

soit $z' = (3+4\boldsymbol{i})\, z - 6$. *Son rapport est* $|3+4\boldsymbol{i}| = 5$. *Par la question 2 (a),* $3+4\boldsymbol{i} = 5e^{2\boldsymbol{i}\alpha}$ *:* 2α *est une mesure de l'angle de* s *(Théorème 22.14 (ii) du cours 22 [5] et Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [2]). Comme* $3+4\boldsymbol{i} \neq 1$, *son centre a pour affixe (Théorème 22.16 (ii) du cours 22 [5])*

$$\frac{-6}{1-(3+4\boldsymbol{i})} = \frac{6}{2+4\boldsymbol{i}} = \frac{3}{1+2\boldsymbol{i}} = \frac{3(1-2\boldsymbol{i})}{5} = \frac{3-6\boldsymbol{i}}{5}.$$

(b) *Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [4], avec* $\omega = 0$ *et* $\alpha = 0$ *(le vecteur* $\overrightarrow{u}$, *d'affixe* $1 = e^{\boldsymbol{i}0}$, *dirige* Δ*),* S_Δ *a pour écriture complexe* $z' = \bar{z}$. *Donc* $s \circ S_\Delta$ *associe au point d'affixe* z *le point d'affixe* $(3+4\boldsymbol{i})\,\bar{z} - 6$ *: c'est l'image de* z *par* f, *et* $f = s \circ S_\Delta$.

(c) *Soit* M *d'affixe* z. *Par (b),* $f(M) = s(M)$ *si et seulement si* $(3+4\boldsymbol{i})\,\bar{z} - 6 = (3+4\boldsymbol{i})\, z - 6$, *soit* $(3+4\boldsymbol{i})(\bar{z} - z) = 0$, *c'est-à-dire, comme* $3+4\boldsymbol{i} \neq 0$, $\bar{z} = z$ *(Théorème 12.5 (ii) du cours 12 [2]). Par le Théorème 12.4 (ii) du cours 12 [2], cela équivaut à* z *réel, c'est-à-dire* $M \in \Delta$. *Les similitudes* f *et* s *envoient* O *et* I *sur les mêmes points sans être égales : l'une est indirecte, l'autre directe, et aucune similitude n'est les deux (Théorème 22.9 (ii) du cours 22 [5]). Si* f *et* s *coïncidaient aussi en un point* $M \notin \Delta$, *les points* O, I, M *ne seraient pas alignés, et l'on aurait* $f = s$ *par le Théorème 22.7 du cours 22 [5].*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 22. Similitudes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.